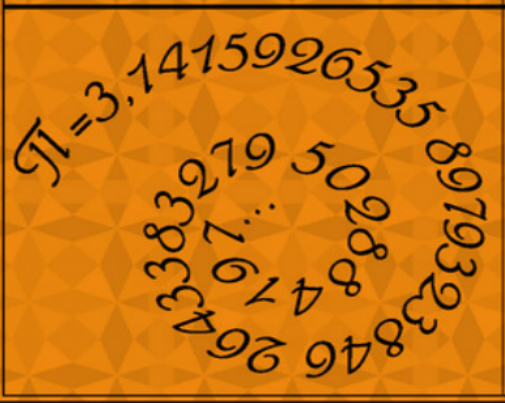
Яков Перельман

Загадки и диковинки в мире чисел



SHOUT
SHARE
IT

Annotation

Занимательные рассказы о числах-великанах и числах – карликах, о системах счисления, об арифметических парадоксах и головоломках разнообразят школьную программу и сделают интересным ваш досуг.

- Яков Исидорович Перельман
  - Предисловие
  - Глава I Старое и новое о цифрах и нумерации
    - Таинственные знаки
    - Старинная народная нумерация
    - Секретные торговые «меты»
    - Арифметика за завтраком
    - Арифметические ребусы
    - Десятичная система в книжных шкафах
    - Наши любимые цифры
  - Глава II Камни преткновения Пифагоровой таблицы
    - Трудные места таблицы умножения
    - Умножение с помощью пальцев
    - Механическое умножение на 9
  - Глава III Потомок древнего абака
    - Чеховская задача
    - Русские счеты
    - Умножение на счетах
    - Деление на счетах
    - Отголоски старины
  - Глава IV Немного истории
    - «Трудное дело – деление»
    - Мудрый обычай старины
    - «Русский» способ умножения
    - Из Страны пирамид
  - Глава V Недесятичные системы счисления
    - Загадочная автобиография
    - Простейшая система счисления
    - Необычайная арифметика
    - Чет или нечет?
    - Дроби без знаменателя
  - Глава VI галерея числовых диковинок
    - Арифметическая кунсткамера
    - число 12
    - число 365
    - Три девятки

- Число Шехеразады
- Число 10101
- Шесть единиц
- Числовые пирамиды
- Девять одинаковых цифр
- Цифровая лестница
- Магические кольца
- Феноменальная семья

○ Глава VII Фокусы без обмана
- Искусство индусского царя
- Не вскрывая конвертов
- Угадать число спичек в коробке
- Чтение мыслей по спичкам
- Идеальный разновес
- Предсказать сумму ненаписанных чисел
- Предугадать результат ряда действий
- Мгновенное деление
- Любимая цифра
- Угадать день рождения
- Одно из «утешных действ» Магницкого

○ Глава VIII Быстрый счет и вечный календарь
-
- «Сколько мне недель?»
- «Сколько мне дней?»
- «Сколько мне секунд?»
- Приемы ускоренного умножения
- Какой день недели?
- Календарь на часах

○ Глава IX Числовые исполины
- Как велик миллион?
- Миллион секунд
- В миллион раз толще волоса
- Упражнения с миллионом
- Названия числовых великанов
- Миллиард
- Биллион и триллион
- Квадриллион
- Кубическая миля и кубический километр

○ Глава X Числовые лилипуты
-
- Лилипуты времени
- Лилипуты пространства
- Сверхисполин и сверхлилипут

○ Глава XI Арифметические путешествия

        - Ваше кругосветное путешествие
        - Ваше восхождение на Монблан
        - Пахари-путешественники
        - Незаметное путешествие на дно океана
        - Путешествующие сидя на месте
- notes
    - 1
    - 2
    - 3
    - 4
    - 5
    - 6
    - 7
    - 8
    - 9
    - 10
    - 11
    - 12
    - 13
    - 14
    - 15
    - 16
    - 17
    - 18
    - 19
    - 20
    - 21
    - 22
    - 23
    - 24
    - 25
    - 26
    - 27
    - 28
    - 29
    - 30
    - 31
    - 32
    - 33
    - 34
    - 35
    - 36
    - 37
    - 38

- ○ 39
- ○ 40
- ○ 41
- ○ 42
- ○ 43
- ○ 44
- ○ 45
- ○ 46
- ○ 47
- ○ 48

Яков Исидорович Перельман
Загадки и диковинки в мире чисел

Предисловие

Этот небольшой сборник отличается от имеющихся у нас других книг сходного содержания[1] главным образом тем, что предлагает менее использованный материал, а в способе его обработки – теснее примыкает к школьной арифметике, затрагивая разнообразные ее отделы. Чтобы не превращать приятной игры ума в утомительное занятие, чересчур серьезное для развлечения и нередко слишком бесплодное для серьезной работы, – автор избегал трудных вопросов и подбирал только такой материал, который вполне посилен для большинства читателей.

Хотя книжка имеет в виду читателей, знакомых лишь с элементами арифметики, в ней найдутся страницы, небезынтересные, быть может, и для более сведущих.

Петроград Май, 1923 г.

Я.П.

Во 2-м издании прибавлена глава «Числовые лилипуты» и сделаны необходимые исправления в тексте.

Сентябрь, 1923 г.

Я.П.

Глава I Старое и новое о цифрах и нумерации

Таинственные знаки

В первые дни русской революции, в марте 1917 года, жители Петрограда были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися неизвестно как у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные начертания. Те, которые мне пришлось видеть, имели форму восклицательных знаков, чередующихся с крестами, какие ставятся обычно возле фамилии умерших. Знаки, по общему убеждению, ничего хорошего означать не могли и вселяли страх в растерянных граждан. По городу пошли зловещие слухи. Заговорили о грабительских шайках, помечающих квартиры своих будущих жертв. «Комиссар города Петрограда», успокаивая население, утверждал, что «таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами»; он приглашал жителей все эти знаки стирать и уничтожать, «а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению».

Появились таинственные восклицательные знаки и зловещие кресты также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и нисколько не страшный секрет этой тайнописи. Своим «открытием» я поспешил поделиться с согражданами, поместив в газетах следующую заметку[2]:

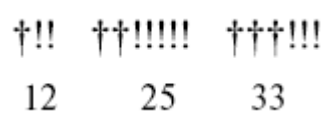
Таинственные знаки

В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное происхождение. Я говорю о знаках такого типа:

†!! ††!!!!! †††!!!

Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у *всех* дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание

естественно внушает тревогу жильцам. Между тем смысл их, вполне невинный, легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:



Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки – единицы; так оказалось *во всех без исключения случаях*, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китайцам[3], не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, надо думать, еще до революции, но только сейчас обратили на себя внимание встревоженных граждан.

Таинственные знаки такого же начертания, но только не с прямыми, а с *косыми* крестами, были обнаружены и в таких домах, где дворниками служили русские, пришедшие из деревень крестьяне. Здесь уже не трудно было выяснить истинных авторов тайнописи, вовсе и не подозревавших, что их безыскусственные обозначения номеров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

Старинная народная нумерация

Откуда взяли петроградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты – десятки, палочки – единицы? Конечно, они не придумали этих знаков сами, а привезли их из родных деревень; такая нумерация давно уже в широком употреблении и понятна каждому, даже неграмотному крестьянину в самом отдаленном и глухом углу России. Способ этот, без сомнения, восходит к глубокой древности и употребителен не в одной лишь России. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: ведь и в римских цифрах палочки означают единицы, а косые кресты – десятки.

Любопытно, что эта народная нумерация некогда была даже в России узаконена: именно по такой системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. «Сборщик – читаем мы в старом *«Своде Законов»,* – принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам, или через писаря, записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и *знаками.* Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком . . . . □
рубль . . . . . ○
десять копеек . . . . . ×
копейка . . . . . |
четверть . . . . . —

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

В другом месте того же тома «Свода Законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысяч рублей – в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для ста рублей – в виде колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и

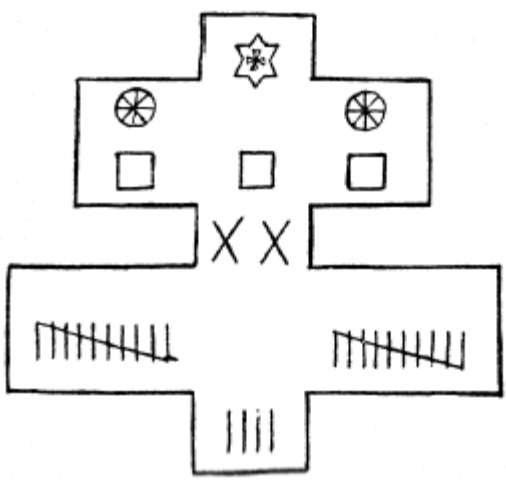
десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

Вот текст закона об этих «ясачных знаках»:

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами, было Доказываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек, так чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания[4]. Употребляемые в квитанции знаки означают:

(звезда) тысяча рублей,
(колесо) сто рублей,
□ десять рублей,
× один рубль,
||||||||| десять копеек,
| копейку.

Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями. Например, 1232 руб. 24 коп. изображаются так:



».

Как видите, наши арабские и римские цифры – не единственный способ обозначения чисел. В старину у нас, да еще и теперь по деревням, употребляются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но мы указали еще не все способы изображения чисел, употребляющиеся в наши дни: торговцы, например, имеют свои секретные знаки для числовых обозначений, – так называемые торговые «меты». О них побеседуем сейчас подробнее.

Секретные торговые «меты»

На вещах, купленных у офеней, – а зачастую и в магазинах, особенно провинциальных – вы, вероятно, замечали непонятные буквенные обозначения вроде

а ве, в уо и т. п.

Это ничто иное, как цена вещи без запроса, которую торговец обозначает для памяти на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Торговец, бросив взгляд на эти буквы, сразу проникает в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называет покупателю цену с запросом.

Такая система обозначения весьма проста – если только знать «ключ» к ней. Обыкновенно торговец выбирает какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах: *трудолюбие, правосудие, ярославец, миролюбец, Миралюбов.* Первая буква слова означает 1, вторая – 2, третья – 3 и т. д.; десятою буквою обозначается нуль. С помощью этих условных букв-цифр торговец и обозначает на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе обозначения. Если например, выбрано слово:

правосудие
1 2345 67 8 90 ’

то цена 4 руб. 75 коп. будет обозначена так:

в уо.

Знак *«п ое»* означает 1 руб. 50 коп., и т. п.

Иногда цена на товаре написана цифрами, но под ценою имеется также и буквенное обозначение – например:

$$\frac{3\,руб.\ 50\,коп.}{де}.$$

Это значит, при ключе «правосудие», что с цены
3 руб. 50 коп. можно сделать скидку не более 80 коп.

Секрет своей меты торговцы строго берегут. Но если купить в одном и том же магазине несколько вещей, то, сопоставляя названную торговцем цену с соответствующими обозначениями,

нетрудно догадаться о значении букв. Особенно легко разгадывать меты дешевых товаров, где запрашивают немного, так что первые цифры уплаченных сумм отвечают начальным буквам обозначения. Разгадав же несколько букв, легко доискаться значения остальных. При некоторой проницательности может быть разгадан «ключ» любой меты.

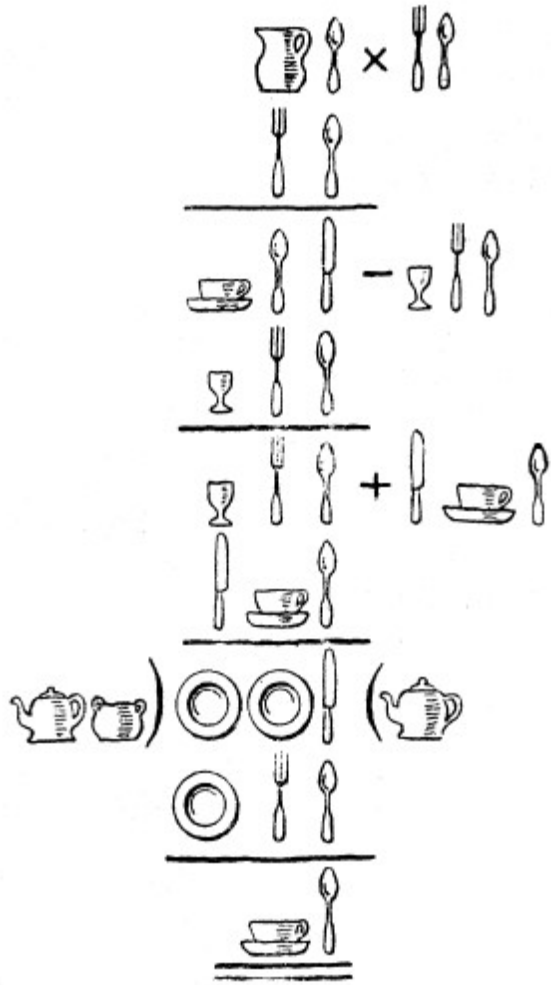
Допустим например, что вы купили в магазине несколько вещей и заплатили за первую 14, за вторую – 12, за третью – 17 рублей. В уголках этих предметов вы находите такие обозначения

пв, пр, пу.

Ясно, что буква *п* означает единицу и что, следовательно, искомое слово-ключ начинается на *п.* Отгадав, по другим товарам, еще одну букву, – например $и = 9$, вы уже догадаетесь, что ключ – *правосудие.* Число подходящих слов, надо заметить, ограничено, и выбор не бывает чересчур затруднительным.

Арифметика за завтраком

После сказанного легко сообразить, что изображать числа можно не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов – карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п.: надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры.



Можно даже, ради курьеза, с помощью таких цифр-предметов изображать действия над числами – складывать, вычитать, умножать, делить. Вот, например, ряд действий над числами, обозначенными предметами сервировки стола (см. рис.). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, чайник, тарелка – все это знаки,

заменяющие цифры.

Попробуйте, глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда такая задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шамполион. Но ваша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь, хотя и обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., написаны по десятичной системе счисления, т. е. вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее есть цифра единиц, а по левую сторону – цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами. Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что «ложка», умноженная на «ложку», дает «нож». А из следующих рядов видно, что «нож» без «ложки» дает «ложку», или что «ложка» + «ложка» = = «ножу». Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении и при умножении само на себя? Это может быть только 2, потому что $2 \times 2 = 2 + 2$. Таким образом мы узнаем, что «ложка» = 2 и, следовательно, «нож» = 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена вилкой? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где вилка участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же вилка фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что отнимая, в разряде десятков, «вилку» от «ложки», получаем в результате «вилку», т. е. при вычитании два минус «вилка» получается «вилка». Это может быть в двух случаях: либо «вилка» = 1, и тогда 2–1 = 1; либо же «вилка» = 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у «чашки»), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6? Испытаем, годится ли 6 для вилки в других действиях. Обратите внимание на сложение V и VI рядов: «вилка» (т. е. 6) + «чашка» = = «тарелке»: значит, «чашка» должна быть меньше 4 (потому что в рядах VII и VIII «тарелка» минус «вилка» = «чашке»). Но «чашка» не может равняться двойке, так как двойка обозначена уже «ложкой»; не может «чашка» быть и единицей – иначе вычитание IV ряда из III не могло бы дать трехзначного числа в V ряду. Не может, наконец, чашка обозначать и 3 – вот почему: если чашка – 3, то бокальчик (см. ряды IV и V) должен обозначать единицу; потому что 1 + 1

= 2, т. е. «бокальчик» + «бокальчик» = «чашке», убавленной на единицу, которая была занята у него при вычитании в разряде десятков; «бокальчик» же равняться единице не может, потому что тогда тарелка в VII ряду будет обозначать в одном случае цифру 5 («бокальчик» + «нож»), а в другом цифру 6 («вилка» + «чашка»), чего быть не может. Значит, нельзя было допустить, что «вилка» = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких – довольно, правда, долгих – поисков, что вилка обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в III и IV рядах видим, что чашка обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что «бокальчик» = 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена ножом. Итак, чашка обозначает цифру 6, а следовательно, бокальчик – цифру 3.

Какая же цифра обозначена кувшинчиком в I ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (III ряд, 624) и один из множителей (II ряд, 12). Разделив 624 на 12, получим 52. Следовательно, «кувшинчик» = 5.

Значение тарелки определяется просто: в VII ряду «тарелка» = «вилке» + «чашка» = «бокальчику» + + «нож»; т. е. «тарелка» =1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Остается разгадать цифровое значение чайника и сахарницы в VII ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставим в действие деления, изображенное в последних трех рядах[5], соответствующие цифры вместо предметов. Получим такое расположение (буквами *ни с* обозначены «чайник» и «сахарница»):

$$\begin{array}{r} \textit{чс})774(\textit{ч} \\ \underline{712} \\ 62 \end{array} .$$

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел *не* и *ч,* которые, конечно, не могут быть ни нулем, ни оканчиваться нулем: значит, ни *ч,* ни *с* не есть нуль. Остаются два предположения: *ч* = 8 и *с* = 9, или же наоборот *ч* = 9 и *с* = 8. Но перемножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, чайник обозначает 8, а сахарница 9 (действительно: 89 × 8 = 712).

Итак, мы разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

кувшин = 5
ложка = 2

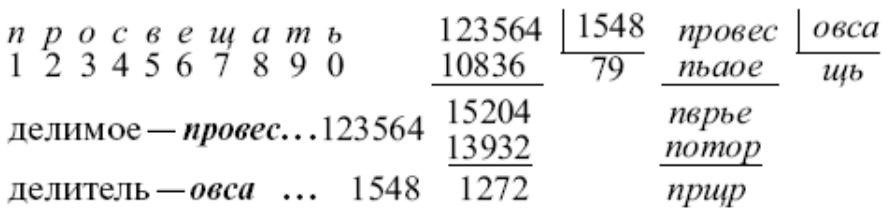
вилка = 1
чашка = 6
бокальчик = 3
чайник = 8
сахарница = 9
тарелка = 7

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

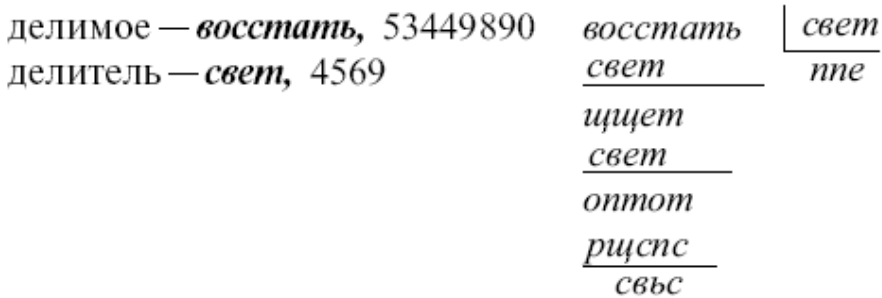
$$
\begin{array}{r}
52\times12 \\
12 \\
\hline
624-312 \\
312 \\
\hline
312-462 \\
462 \\
\hline
89)\,774\ (8 \\
712 \\
\hline
62
\end{array}
$$

Арифметические ребусы

Арифметические ребусы – занимательная игра американских школьников, у нас пока еще совершенно неизвестная[6]. Она состоит в отгадывании задуманного слова посредством решения задачи вроде той, какую мы сейчас решили в статье «Арифметика за завтраком». Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 неповторяющихся букв – например, «трудолюбие», «специально», «просвещать». Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово «просвещать», то можно взять такой пример деления:



Можно взять и другие слова для делимого и делителя – например:



Буквенное изображение того или иного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому бессмысленному, казалось бы, набору букв угадать задуманное слово. Как в подобных случаях следует доискиваться числового значения букв, – читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу, предложенную в предыдущей статье. При некотором терпении всегда можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

т р у д о л ю б и е
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — *блюдо*, 86745
делитель — *труд*, 1234

блюдо	*труд*
блуб	*юе*
уло	

– то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, т. е. получить в частном еще 2 или 3 десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:

с п е ц и а л ь н о
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
делимое — ***палец,*** 26734
делитель — ***пила,*** 2576

палец	*пила*
пила	*со,ел*
нлцо	
ллпь	
поспо	
сьосп	
понь	

Если бы в этом случае мы остановились на целом частном *(со),* отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

Для читателя, который пожелал бы испытать свои силы в разрешении подобных арифметических ребусов, привожу еще несколько примеров:

I

давние	*дни*
дояс	*ипи*
ввеи	
оеад	
дове	
дояс	
вд	

II

постная	*репа*
репа	*кокн*
кркнн	
ккпто	
пнеа	
репа	
ряаяя	
китар	
ркян	

III

уравнить	*ниву*
уурер	*рее*
уьиаи	
ниву	
вллит	
внуре	
верль	
внуре	
ауир	

По этим образцам читатель сможет самостоятельно

подыскать множество других примеров.

Десятичная система в книжных шкафах

Особенность десятичной системы счисления остроумно используется даже в области, где с первого взгляда этого и ожидать не приходится, – именно, при распределении книг в библиотеке.

Обычно, желая указать библиотекарю номер нужной вам книги, вы просите дать вам каталог и предварительно справляетесь в нем, – потому что в каждом книгохранилище существует обыкновенно своя нумерация книг. Однако имеется и такая система распределения книг по номерам, при которой одна и та же книга должна иметь одинаковый номер во всякой библиотеке. Это так называемая десятичная система классификации книг.

Система эта – к сожалению, принятая пока еще далеко не всюду, – чрезвычайно удобна и весьма не сложна. Сущность ее состоит в том, что каждая отрасль знания обозначается определенным числом и притом так, что цифровой состав этого числа сам говорит о месте данного предмета в общей системе знаний.

Книги прежде всего разбиваются на десять обширных классов, обозначенных цифрами от 0 до 9.

0. Сочинения общего характера.
1. Философия.
2. Религия.
3. Общественные науки.
4. Филология.
5. Физико-математические и естественные науки.
6. Прикладные науки.
7. Изящные искусства.
8. Литература.
9. История и география.

В обозначении номера книги по этой системе первая цифра прямо указывает на ее принадлежность к определенному классу из перечисленных выше: каждая книга по философии имеет номер, начинающийся с 1, по математике – с 5, по технике – с 6. И наоборот, если номер книги начинается, например, с 4, то мы, не раскрывая книги, можем утверждать, что перед нами сочинение из области языкознания.

Далее, каждый из десяти перечисленных классов книг подразделяется на 10 главных отделов, тоже отмеченных

цифрами; эти цифры ставят в обозначении номера на втором месте. Так, 5-й класс, включающий физико-математические и естественные книги, разделяется на следующие отделы:

50. Общие сочинения по физико-математическим и естественным наукам.
51. Математика.
52. Астрономия. Геодезия.
53. Физика. Механика.
54. Химия.
55. Геология. Палеонтология.
56. Общая география.
57. Биология. Антропология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются по отделам и остальные классы. Например, в классе прикладных наук (6) отдел медицины обозначается цифрой 1 после 6, т. е. числом 61; по сельскому хозяйству – 63, по домоводству – 64, торговле и путям сообщения – 65, промышленности и технологии – 66, и т. п. Точно так же в 9-м классе все книги по географии относятся к отделу № 91, и т. п.

Присоединение к двум первым цифрам третьей характеризует ее содержание еще ближе, указывая, к какому именно подотделу данного отдела она относится. Например, в отделе математики (51) присоединение, на третьем месте, цифры 1 указывает, что книга относится к арифметике; цифры 2 – к алгебре, и т. д. Поэтому все книги по арифметике имеют первые три цифры № 511, по алгебре – 512, геометрии – 513 и т. д. Точно так же и отдел физики (53) разбивается на 10 подотделов: книги по электричеству обозначаются № 537, по оптике – № 535 и т. д.

Затем следует дальнейшее дробление подотдела на разряды, обозначаемые четвертой цифрой номера, и т. д.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, нахождение нужной книги упрощается до крайности. Если, например, вы интересуетесь геометрией, вы прямо идете к шкафам, где номера начинаются с пяти, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги № 51… и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги № 513…; здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке. Точно так же, ища книги по кооперации, вы обратитесь к книгам № 331… не заглядывая в каталог и никого не затрудняя расспросами.

Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться недостатка в числах для нумерации книг. И наоборот,

отсутствие книг по каким-либо отраслям не может препятствовать применению десятичной системы: некоторый ряд номеров останется лишь неиспользованным.

Наши любимые цифры

Вероятно, все замечали на себе и на окружающих, что среди цифр есть излюбленные, к которым мы питаем какое-то особенное пристрастие. Мы, например, очень любим «круглые числа», т. е. оканчивающиеся на 0 или 5. И это пристрастие к определенным, излюбленным числам, предпочтение их другим, заложено в человеческой натуре гораздо глубже, чем обыкновенно думают. В этом отношении сходятся вкусы не только всех европейцев и их предков, например, древних римлян, – но даже диких обитателей других частей света.

При всякой переписи населения обычно наблюдается чрезмерное обилие людей, возраст которых оканчивается на 5 или на 0; их гораздо больше, чем должно быть. Причина кроется, конечно, в том, что люди не помнят отчетливо, сколько им лет, а показывают возраст, невольно «округляя» годы. Подобное же преобладание «круглых» возрастов наблюдается и на могильных памятниках древних римлян.

Эта одинаковость числовых пристрастий идет еще дальше. Германский психолог, проф. К. Марбе, подсчитал, как часто встречается в обозначениях возраста на древнеримских могильных плитах та или иная цифра, и сравнил эти результаты с повторяемостью цифр в обозначениях возраста по данным переписи в американском штате Алабама, населенном преимущественно невежественными неграми. Получилось удивительное согласие: древние римляне и современные нам негры до малейших подробностей сходятся в числовых симпатиях и антипатиях! Конечные цифры возраста, по частоте их повторяемости, располагались в обоих случаях в одинаковой последовательности, а именно:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Но и это еще не все. Чтобы выяснить числовые пристрастия современных европейцев, упомянутый ученый производил такого рода опыты: он предлагал множеству лиц определить «на глаз», сколько миллиметров заключает в себе полоска бумаги, например, в палец длиною, и записывал ответы. Подсчитав затем частоту повторения одних и тех же конечных цифр, ученый получил снова тот же самый ряд:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Нельзя считать случайностью, что народы, столь отдаленные друг от друга и антропологически, и географически, – обнаруживают полную одинаковость числовых симпатий, т. е. явное пристрастие к «круглым» числам, оканчивающимся на 0 или 5, и заметную неприязнь к числам некруглым (т. е. к оканчивающимся на 1, 9, 4, 6).

Вы можете и сами убедиться в постоянстве этих пристрастий, если будете, в виде опыта, предлагать большому кругу лиц назвать любое число между 1 и 10, между 11 и 20, 21 и 30, 31 и 40, 41 и 50; окажется, что большинство ответов будет оканчиваться на 5, остальные же цифры будут попадаться тем реже, чем больше они разнятся от 5; другими словами, у вас получится такая же убывающая гамма числовых симпатий, какая приведена выше.

Заметная любовь всех людей к пятеркам и десяткам находится, без сомнения, в прямой связи с десятичным основанием нашей системы счисления, т. е. в конечном итоге – с числом пальцев на наших руках. Но все же остается неразгаданной та математическая правильность, с какой слабеет эта симпатия по мере удаления от 5 и 10.

Многие не подозревают, что пристрастие к округленным числам обходится нам довольно дорого. Товарные цены в розничной продаже всегда тяготеют к этим круглым числам: некруглое число, получающееся при исчислении продажной стоимости товара, дополняется до большего круглого числа. Округленность цены достигается здесь всегда за счет покупателя, а не продавца. Общая сумма, которую страна переплачивает торговцам за удовольствие приобретать товары по круглым ценам, накопляется весьма внушительная. Кто-то дал себе труд, задолго до последней войны, приблизительно подсчитать ее, и оказалось, что население России ежегодно переплачивало в форме разницы между круглыми и некруглыми ценами на товары не менее 30 миллионов рублей – разумеется, золотых.

Не слишком ли дорогая жертва за невинную слабость к округлениям?

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$100 = \left\{ \begin{array}{c} 1+2+3+4+5+6+7+8\times 9 \\ 12+3-4+5+67+8+9 \\ 123+4-5+67-89 \\ 123-45-67+89 \end{array} \right\} = 100$$

Глава II Камни преткновения Пифагоровой таблицы

Трудные места таблицы умножения

Аще кто не твердит
таблицы и гордит,
Не может познати
числом что множати

И во всей науки
несвобод от муки,
Колико не учит
туне ся удручит

И в пользу не будет
аще ю забудет.

Такими чуждыми для современного слуха стихами воспевал пользу Пифагоровой таблицы составитель обширного старинного русского учебника математики[7] Леонтий Магницкий, – учебника, по которому учились в XVIII веке наши прадеды и через врата которого гениальный Ломоносов вступил юношей в храм своей учености.

Большинство из нас уже успело позабыть о том времени, когда мы приступали к изучению таблицы умножения и постепенно одолевали ее строку за строкой. Однако, некоторые, вероятно, помнят, что не все строки этой таблицы давались одинаково. Одни усваивались очень быстро, как-то сами собой, чуть не с первого раза, – например $5 \times 5 = 25$, $8 \times 2 = 16$. Другие давались гораздо труднее: сначала как будто запоминались, но скоро снова ускользали из памяти, так что приходилось возвращаться к ним много раз, прежде чем они прочно запечатлевались. Припомните, скоро ли удалось вам затвердить, что $7 \times 8 = 56$? По крайней мере, для многих это было одно из труднейших мест таблицы.

Между тем для овладения арифметикой необходимо безошибочное знание всей таблицы: современный способ умножения и деления многозначных чисел основывается на твердом усвоении готовых результатов умножения однозначных чисел, т. е. на знании наизусть Пифагоровой таблицы. Справедливо, писал Магницкий, что не знающий ее «во всей науки несвобод от муки». И в наши дни, как во времена Магницкого, миллионы юных школьников под всеми широтами и долготами земного шара терпеливо заняты ее затверживанием.

Стремясь облегчить этот труд, специалисты по педагогической психологии в последнее время обратили внимание на затруднительные места таблицы умножения и подвергли их обстоятельному исследованию. Результаты получились любопытные. Оказалось, что главными камнями преткновения в таблице являются для всех одни и те же строки, а именно приведенные здесь пять:

$8 \times 7 = 56$
$9 \times 7 = 63$
$9 \times 8 = 72$
$7 \times 6 = 42$
$9 \times 6 = 54$

Из многих сотен опрошенных взрослых и детей большинство указало именно на эти пять случаев умножения как на наиболее трудные во всей таблице. Особенно единодушно указывали на строку $8 \times 7 = 56$.

Далее строки Пифагоровой таблицы располагались по степени трудности в таком порядке:

8×6
8×8
7×6
8×4
7×4
7×5
7×3
5×4
8×5
6×4

Затем исследователи «камней преткновения» Пифагоровой таблицы сделали такой же тщательный опрос о том, какие из 10-ти столбцов в таблице умножения являются труднейшими для усвоения. И тут ответы получились однообразные. А именно, всего труднее оказались случаи умножения на 7, затем на 8. Третье место занимает умножение на 9, четвертое – умножение на 6. Напротив, легкими строками единодушно считаются, – как и следовало ожидать – прежде всего случаи умножения на 2; затем – на 3, на 5 и на 4.

Результаты этих психологических изысканий, произведенных среди германских школьников и учителей[8], по всей вероятности, совпадают с выводами личного опыта большинства читателей. Все, без сомнения, согласятся, что именно случаи умножения на 7, 8 и 9 были и остаются наиболее трудными для усвоения и что

труднейшие из всех – строки: 8 × 7,9 × 7, 9 × 8,7 × 6 и 9 × 6; спор может идти разве лишь о порядке этих случаев по степени их трудности. Да и будучи взрослыми, победоносно преодолев все арифметические затруднения, мы порою запинаемся именно на этих случаях умножения, когда нам приходится вычислять наспех или с усталой головой; не доверяя памяти, мы стараемся проверить результат окольным путем или спрашиваем подтверждения у других: «Семью восемь – пятьдесят шесть?»

Очевидно, затруднения эти не случайны, раз они повторяются с таким постоянством. Чем же они объясняются?

Причин несколько, и все они коренятся в тех бессознательных приемах, которыми мы обычно пользуемся при запоминании чисел. В тех случаях умножения, которые мы считаем «легкими», нам оказывает поддержку какой-нибудь вспомогательный прием (хотя обычно мы об этом и не подозреваем). Например, умножение на 2 мы бессознательно заменяем более знакомым нам действием сложения: 4 × 2 = 4 + 4. Часто запоминанию помогает созвучие: «пятью пять – двадцать пять», «шестью шесть – тридцать шесть», «шестью восемь – сорок восемь». Рифмованные строки всегда легче запоминаются, особенно в молодом возрасте; недаром в старинных грамматиках, для облегчения запоминания, составлялись стихотворные бессмыслицы даже из предлогов и наречий.

Все обстоятельства, облегчающие запоминание чисел Пифагоровой таблицы, было бы долго перечислять, тем более, что они еще не установлены бесспорно. Почему строка 9х9 = 81 затверживается легче, чем 7 × 8 или 8 × 9? Вероятно, здесь помогает характерный узор числа 81: кривая восьмерка и рядом – прямая единица. Немалую роль играют и такие признаки, как цифра 5 в конце всех чисел, полученных от умножения на это число. Иные случаи легко запоминаются благодаря их частому применению в жизни (4 × 7 – четыре недели).

Особенная трудность тех пяти случаев умножения, которые при опросе сосредоточили на себе всего больше голосов, заключается именно в том, что к ним не применимо ни одно из перечисленных условий, облегчающих запоминание. Строки

$$8 \times 7 = 56,\ 9 \times 7 = 63,\ 9 \times 8 = 72,\ 7 \times 6 = 42,\ 9 \times 6 = 54$$

трудны и потому, что реже других встречаются в житейском обиходе, и потому, что не звучат созвучно, и потому, что не дают опоры глазу каким-либо характерным признаком. То, что строки эти состоят из четырех различных, но близких цифр (8, 7, 6, 5), также затрудняет запоминание. Наконец, такие сходные

результаты, как 56 и 54, легко смешиваются и требуют для отчетливого различения особого напряжения. В подобных неуловимых особенностях некоторых строк таблицы умножения и коренится причина, превращающая их в неизменные камни преткновения для всякого, затверживающего эту таблицу.

Умножение с помощью пальцев

Чтобы облегчить усвоение таблицы умножения, можно прибегнуть к пальцам наших рук: пользуясь ими как своего рода счетной машиной, мы можем автоматически получать произведения, начиная от 6 × 6 и кончая 15 × 15. Знать наизусть нужно здесь лишь табличку умножения до 5 × 5 и, конечно, еще самый прием умножения на пальцах.

Вот в чем состоит этот старинный способ, которым и теперь еще часто пользуются простолюдины в Сибири, на Украине, в глухих углах Лифляндии и с которым не мешало бы знакомить всех школьников при прохождении умножения. Пусть требуется умножить 7 × 9. Загибаем на одной руке столько пальцев, на сколько 7 больше 5, а на другой – столько, на сколько 9 больше 5, – короче, загибаем избыток множителей над 5. Итак:

	загнуто	незагнуто
на одной руке	2	3
	+	×
на другой руке	4	1

Теперь сложите число загнутых пальцев *(2 + 4 = 6)*, к результату припишите нуль и прибавьте произведение незагнутых (3 × 1 = 3). Получаем 63.

Еще пример – 6 × 8:

	загнуто	незагнуто
на одной руке	1	4
	+	×
на другой руке	3	2
в результате	**4**	**8**

Способ, как видите, при своей простоте едва ли может затруднить даже самого юного математика; зная твердо первую часть Пифагоровой таблицы, свободную от «камней преткновения», можно этим приемом уже без особых усилий овладеть остальною, более трудною частью ее.

Цыфиркин из «Недоросля», обучавший Митрофанушку счетной премудрости, был, без сомнения, знаком с способом умножения на пальцах, и надо думать, старался с его помощью облегчить своему неспособному воспитаннику проникновение в тайны Пифагоровой таблицы. Сам же Цыфиркин мог узнать об

этом умножении из «Арифметики» Магницкого, где оно описано в следующих выражениях:

«Ин способ к твержению таблицы, по перстом ручным сице.

«Аще хощеши ведати колико будет 7 × 7 и ты причти к перстом левыя руки от правыя 2, и станет 7; такожде и к перстом правыя руки от левыя, чтобы стало 7-же: и сложи причтенные оные персты обоих рук по 2, и будут значити 40: достальные же обоих рук, сиречь от правыя

3 и от левыя 3: умножи их между собою и будет 9, их же приложи к 40 и будет 7 × 7 = 49. Тако и о прочих».

На чем же основан этот любопытный счетный прием? Мы поймем это, если изобразим его в общем виде. Маленькая экскурсия в область «общей арифметики», т. е. алгебры, убедит нас прежде всего, что этот способ должен давать правильные результаты во всех случаях от 6 × 6 до 10 × 10. Каждое число, большее пяти, мы можем представить в таком виде:

$5 + a$, $5 + b$ или $5 + c$ и т. п.

Во всех этих выражениях буквами a, b, c обозначены избытки числа над 5. Если мы имеем дело только с числами не свыше 10, то a, b, c меньше 5. Произведение двух чисел больших пяти, в таком обозначении, изобразится следующим образом:

$(5 + a) \times (5 + b)$

или, – так как в алгебре знака умножения в подобных случаях не пишут, —

$(5 + a)(5 + b)$.

А что мы делаем, когда умножаем с помощью пальцев? Загибаем на одной руке a пальцев, на другой – b, оставляя незагнутыми остальные пальцы, т. е. на одной руке $(5 - a)$, на другой $(5 - b)$ пальцев. Затем складываем $a + b$ и получаем цифру десятков, т. е. число

$10(a + b)$.

К нему прибавляем произведение чисел на загнутых пальцах, т. е.

$(5 - a)(5 - b)$.

И следовательно, в результате получаем:

$10\ (a + b) + (5 - a)\ (5-b).$

Если выполним умножения, обозначенные скобками, мы будем иметь:

$10a + 10b + 25 - 5a - 5b + ab.$

Но так как $10a - 5a = 5a$, а $10b - 5b = 5b$, то строка упрощается и получает вид:

$25 + 5a + 5b + ab,$

т. е. то же самое, что получилось бы от непосредственного умножения данных нам множителей $(5 + a)$ и $(5 + b)$:

$(5 + a)(5 + b) = 25 + 5a + 5b + ab.$

Короче, все действия на пальцах можно представить в общем виде так:

	загнуто	незагнуто
на одной руке	a	$5 - a$
на другой руке	b	$5 - b$
в результате . . . . . 10 (a +b) + (5 – a) (5 – b).		

А это выражение, мы уже знаем, равно $(5 + a)\ (5 + b)$.

Мы сказали в самом начале статьи, что умножение на пальцах можно выполнять до 15×15. Как же

это делается? Несколько иначе, чем умножение до 10×10. Пусть требуется умножить 12×14. Загибаем на руках избыток множителей над 10 (а не над 5, как раньше), т. е. на одной руке 2 пальца, на другой – 4. Складываем $2 + 4$, приписываем нуль, прибавляем произведение тех же чисел 2 и 4 (а не чисел незагнутых пальцев) и, кроме того, во всех случаях прибавляем 100. Имеем:

$12 \times 14 = 100 + (2 + 4)\ 10 + 2 \times 4 = 168.$

Еще пример —11×13:

	загнуто
на одной руке	1
на другой руке	3
в результате . . . . . 100 + 40 + 3 = 143.	

На чем основан этот прием? Обратимся снова к алгебре. Все случаи подобного умножения можно в общем виде изобразить так:

$(10 + a) \times (10 + b)$,

где a и b – числа, меньшие 5, – означают, сколько загнуто пальцев. Выполнив умножение по общим правилам, получим:

$(10 + a)(10 + b) = 100 + 10(a + b) + ab$.

Из этой строки ясна правильность способа: сто + + сумма загнутых пальцев с приписанным нулем + произведение загнутых пальцев.

Любопытно, что произведение 10 × 10 можно получить на пальцах по обоим способам. Действительно, по первому имеем:

	загнуто	незагнуто
на одной руке	5	0
на другой руке	5	0
в результате . . . . . (5 + 5) 10 + 0 + 0 = 100.		

По второму способу:

	загнуто
на одной руке	0
на другой руке	0
в результате. . . . . 100 + 10 (0 + 0) + 0 × 0 = 100.	

Существует также прием умножения на пальцах чисел от 15 × 15 до 20 × 20, – но способ этот слишком уж сложен. Всякая счетная машина хороша, когда обращение с нею просто; наша природная десятипальцевая машина не составляет исключения из этого правила.

Механическое умножение на 9

Опишем еще – как интересный курьез – простой прием умножения однозначных чисел на 9. Пусть нужно умножить 7 × 9. Положите перед собою на стол рядом обе руки и загните 7-й палец, считая слева. Тогда перед вами налево 6 пальцев, направо – 3: искомое произведение 63.

При умножении 5 × 9 загибаем 5-й палец: имеем налево 4, направо – 5 пальцев; произведение 45.

Предоставляем читателю самому сообразить, на чем этот способ основан.

Глава III Потомок древнего абака

Чеховская задача

Всем, вероятно, памятна в своем роде знаменитая арифметическая задача, которая так смутила семиклассника Зиберова из чеховского рассказа «Репетитор».

Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор, и его ученик, двенадцатилетний Петя, пока не выручил их Петин отец, Удодов:

Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

– Для чего же вы делите? Постойте! Впрочем, так… продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка я разделю!

Зиберов [репетитор] делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

– Странно… – думает он, ероша волосы и краснея. – Как же она решается. Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая.

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

– Гм!., странно… Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то!

– Решайте же! – говорит он Пете.

– Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая, – говорит Удодов Пете. – Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич [репетитор] берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

– Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, – говорит он. – Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я вот разделил… Понимаете? Или, вот что. Решите мне эту задачу к завтраму… Подумайте…

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

– И без алгебры решить можно, – говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. – Вот, извольте видеть…

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

– Вот-с… по-нашему, по-неученому.

Эта сценка с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом несчастного репетитора, задает нам, в свою очередь, три новые задачи. А именно:

1. Как предполагал репетитор решить задачу алгебраически?

2. Как должен был ее решить Петя?

3. Как решил ее отец Пети на счетах «по-неучено-му»? На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то, во всяком случае, – многие читатели нашей книжки. Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим три наши задачи по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу «с иксом и игреком», будучи уверен, что задача – «собственно говоря, алгебраическая». И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений, – только не неопределенных, как ему показалось. Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень нетрудно; вот они:

$$x + y = 38,\ 5x + 3y = 540,$$

где $\times$ и y — числа аршин синего и черного сукна.

2. Однако задача довольно легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, она, конечно, не затруднила бы вас. Вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее, – тогда за всю партию в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить $5 \times 138 = 690$ рублей; это на $690–540 = 150$ рублей больше того, что было заплачено в действительности. Разница в 150 рублей указывает, что в партии имелось и более дешевое черное сукно по 3 рубля аршин. Дешевого сукна было столько, что из двухрублевой разницы на 1 аршине составилось 150 рублей: очевидно, число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2. Получаем ответ – 75; вычтя эти 75 аршин из общего числа 188 аршин, узнаем, сколько было синего сукна: $138 – 75 = 63$. Так и должен был решать задачу Петя.

3. На очереди у нас третий вопрос: как решил задачу Удодов-старший?

В рассказе говорится об этом очень кратко: «Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было».

В чем же, однако, состояло это «щелканье на счетах»? Другими словами, каков способ решения задачи с помощью счетов?

Разгадка такова: злополучная задача решается на счетах тем

же приемом, что и на бумаге, – тем же рядом арифметических действий. Но только выполнение их значительно упрощается благодаря преимуществам, которые наши русские счеты предоставляют всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, отставной губернский секретарь Удодов хорошо умел считать на счетах, потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыли ему то, чего репетитор-семиклассник добивался узнать «с иксом и игреком». Вот какие действия должен был проделать на счетах Петин отец.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножить 138 на 5. Для этого он, по правилам действий на счетах, умножил сначала 138 на 10, – т. е. просто перенес 138 одной проволокой выше, – а затем разделил это число пополам, опять-таки на счетах же. Деление начинают снизу: откидывают половину косточек, отложенных на каждой проволоке; если число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят из затруднения, «раздробляя» одну косточку этой проволоки на 10 нижних. В нашем, например, случае делят 1380 пополам так: на нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают 4 косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек откидывают 1, а оставшуюся 1 косточку заменяют мысленно десятью нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к косточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют одну косточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки. В результате на верхней проволоке совсем не остается косточек; на средней $1+5 = 6$ сотен; на нижней $4 + 5 = 9$ десятков. Итого, 690 единиц. Выполняется все это, конечно, автоматически.

Далее Удодову-старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счетах – всем известно.

Наконец, полученную разность, 150, оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 2, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, т. е. 75.

Все эти простые действия выполняются на счетах гораздо скорее, чем тут описано.

Русские счеты

Есть много полезных вещей, которых мы не умеем ценить только потому, что они, постоянно находясь у нас под руками, превратились в самый обыкновенный предмет нашего домашнего обихода. К числу таких недостаточно ценимых вещей принадлежат, бесспорно, и наши конторские счеты – русская народная счетная машина, представляющая собою лишь видоизменение знаменитого «абака», или «счетной доски» наших отдаленных предков. Все древние народы – египтяне, греки, римляне – употребляли при вычислениях счетный прибор «абак», очень походивший на наши десятикосточковые счеты[9]. В средние века вплоть до XVI века подобные приспособления были широко распространены в Европе. Но в наши дни видоизмененный абак – счеты – сохранился, кажется, только в России да в Китае (семикосточковые счеты, «суан-пан»). Запад не знает десятикосточковых счетов, – вы не найдете их ни в одном магазине Европы; быть может, потому-то мы и не ценим этого счетного прибора так высоко, как он заслуживает, смотрим на него как на какую-то наивную кустарную самодельщину в области счетных приборов.

Между тем мы вправе были бы гордиться нашими десятикосточковыми счетами, так как при изумительной простоте своего устройства они, по достигаемым на них результатам, могут соперничать в некоторых отношениях даже со сложными, дорогостоящими счетными машинами западных стран. В умелых руках этот нехитрый прибор делает порою настоящие чудеса. Иностранцы, впервые знакомящиеся с нашими сметами, охотно признают это и ценят их несравненно выше, нежели мы сами. Специалист, заведовавший одной из крупных русских фирм по продаже счетных машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счетами иностранцев, привозивших ему в контору образцы сложных счетных машин. Он устраивал состязание между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной «аддиционной» машине (т. е. машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счетами. И нередко случалось, что последний – правда, большой мастер своего дела, – брал верх над обладателем заморской машины в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счетах, сразу же сдавался и складывал свою сложную машину обратно в чемодан, не надеясь продать в России ни одного экземпляра.

– К чему вам дорогие счетные машины, если вы так искусно

считаете при помощи ваших дешевых счетов! – говорили нередко представители иностранных фирм.

А ведь заграничные машины в сотни раз дороже наших конторских счетов!

Правда, на русских счетах нельзя производить всех тех действий, которые выполняются машинами. Но во многом, например, в сложении и вычитании, счеты смело могут соперничать со сложными механизмами. Впрочем, умножение и деление в искусных руках также значительно ускоряются на счетах, – если знать специальные приемы выполнения этих действий.

Познакомимся же с некоторыми из этих приемов.

Умножение на счетах

Вот несколько приемов, пользуясь которыми, всякий, умеющий быстро складывать на счетах, сможет проворно выполнять встречающиеся на практике примеры умножения.

Умножение на 2 и на 3 заменяется простым сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собою.

Умножение числа на 5 выполняется на счетах так: переносят все число одной проволокой выше, – т. е. умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 с помощью счетов – мы уже объяснили выше, на стр. 37).

Вместо умножения на 6 умножают на 5 и прибавляют умножаемое.

Вместо умножения на 7 множат на 10 и отнимают умножаемое три раза.

Умножение на 8 заменяют умножением на 10 без двух.

Точно так же множат на 9: заменяют умножением на 10 без 1.

При умножении на 10 – переносят, как мы уже сказали, все число одной проволокой выше.

Читатель теперь, вероятно, уже и сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа больше 10 и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить 10+1; множитель 12 заменяют 10 + 2, или практически 2 + 10, т. е. сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют удесятеренное. Множитель 13 заменяется 10 + 3 и т. д.

Вот несколько особых случаев для множителей первой сотни:

$20 = 10 \times 2$
$22 = 11 \times 2$
$25 = (100 : 2) : 2$
$26 = 25 + 1$
$27 = 30 - 3$
$32 = 22 + 10$
$42 = 22 + 20$
$43 = 33 + 10$
$45 = 50 - 5$
$63 = 33 + 30$ и т. д.

Легко видеть, между прочим, что с помощью счетов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55 и т. п., а потому следует стремиться при разбивке множителей

пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа, большие 100. Если искусственные приемы утомительны, мы всегда можем умножить с помощью счетов по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения – это все же дает некоторое сокращение времени.

Деление на счетах

Выполнять деление с помощью конторских счетов гораздо труднее, чем умножать; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно сложных. Интересующимся ими придется обратиться к специальным руководствам. Здесь же укажу лишь, для примера, удобные приемы деления с помощью счетов на числа первого десятка (кроме числа 7, способ деления на которое чересчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем – способ этот очень прост.

Гораздо сложнее прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь 3,3333… (известно, что 0,333… = 1/3). Умножать с помощью счетов на 3 мы умеем; уменьшать в 10 раз – тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ниже. После не долгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд такой сложный, оказывается на практике довольно удобным.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на 10 и удвоением результата.

На 6 делят с помощью счетов в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

Деление на 7, как мы уже сказали, выполняется помощью счетов чересчур сложно, и потому мы излагать его не будем.

На 8 делят в три приема: сначала делят на 2, потом полученное вновь на 2, и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что 1/9 = 0,1111… Отсюда ясно, что, вместо деления на 9, можно последовательно складывать 0,1 делимого + 0,1 его + 0,001 его и т. д.[10].

Всего проще, как видно, делить на 2,10 и 5 – и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80,100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

Отголоски старины

С отдаленными предками наших русских счетов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях. Мало кто подозревает, например, что, завязывая «для памяти» узелок на носовом платке, мы повторяем то, что некогда с большим смыслом делали наши предки, «записывая» таким образом итог счета на шнурках. Веревка с узлами представляла собой счетный прибор, в принципе аналогичный нашим счетам и, без сомнения, связанный с ними общностью происхождения: это – «веревочный абак».

С абаком же связаны и такие распространенные теперь слова, как «банк» и «чек». «Банк» по-немецки означает скамья. Что же общего между финансовым учреждением, «банком» в современном смысле слова, и скамьей? Оказывается, что здесь далеко не простое совпадение. Абак в форме скамьи был широко распространен в деловых кругах Германии в XV–XVI веках; каждая меняльная лавка или банкирская контора характеризовалась присутствием «счетной скамьи» – и естественно, что скамья стала синонимом банка.

Более косвенное отношение к абаку имеет слово «чек». Оно английского происхождения и производится от глагола «чекер» (chequer, или checker) – графить; «чекеред» (графленый) называли разграфленную в форме абака кожаную салфетку, которую в XVI–XVII веках английские коммерсанты носили с собою в свернутом виде и, в случае надобности произвести подсчет, развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абаков, и неудивительно, что на них перенесено было, в сокращенном виде, и название этих счетных приборов: от слова «чекеред» произошло слово «чек».

Любопытно, откуда произошло выражение «остаться на бобах», которое мы применяем теперь к человеку, проигравшему все свои деньги. Оно очень древнего происхождения и относится к тому времени, когда все денежные расчеты – в том числе и расчеты между игроками – производились на абаке, на счетном столе или скамье, с помощью бобов, игравших роль косточек наших счетов[11]. Человек проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша – отсюда и соответствующий оборот речи, надолго переживший породившие его обстоятельства.

Решение числовых ребусов, предложенных на стр. 17:

I — «соединение»; II — «крепостная»;
III — «управление».

Глава IV Немного истории

«Трудное дело – деление»

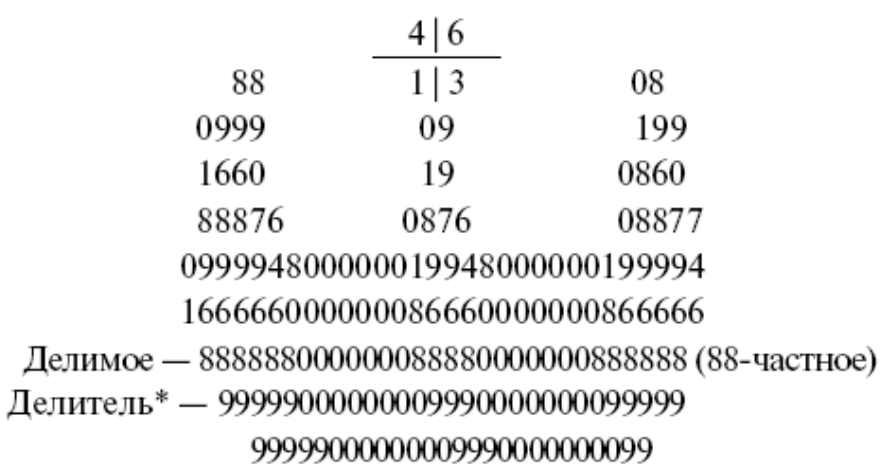
Привычным движением зажигая спичку, мы иной раз еще задумываемся о том, каких трудов стоило добывание огня нашим предкам, не очень даже отдаленным. Но мало кто подозревает, что и употребительные ныне способы выполнения четырех арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к искомому результату. Предки наши пользовались приемами, гораздо более громоздкими и медленными. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, даже всего за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи. Со всех концов Европы приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела… Особенно сложны и трудны были для наших предков действия умножения и деления – последнее всего больше. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, одновременно были в ходу целые дюжины различных способов умножения и деления – приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый «магистр деления» (были такие специалисты) старался изобрести собственный способ выполнения этого действия. И все эти приемы умножения – «шахматами или органчиком», «загибанием», «по частям или в разрыв», «крестиком», «решеткой», «задом наперед», «ромбом», «треугольником», «кубком или чашей», «алмазом» и прочие[12], а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна. «Трудное дело – деление» – гласила старинная латинская пословица, и вполне обоснованно, если принять во внимание кропотливые, утомительные методы, какими выполнялось некогда это действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия: под веселым названием скрывался обычно длиннейший и утомительнейший ряд запутанных манипуляций. В XVI веке кратчайшим и

удобнейшим способом деления считался прием деления «лодкой или галерой». Знаменитый итальянский математик того времени Николай Тарталья в своем обширном учебнике арифметики писал о нем следующее:

«Второй способ деления называется в Венеции[13] лодкой или галерой, вследствие некоторого сходства фигуры, получающейся при этом, потому что при делении некоторых родов чисел составляется фигура, похожая на лодку, а в других на галеру, которая в самом деле красиво выглядит; галера получается иной раз хорошо отделанная и снабженная всеми принадлежностями – выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами»…

Читается это очень весело: так и настраиваешься скользить по числовому морю на парусах арифметической галеры. Но хотя старинный итальянский математик и рекомендует этот способ как – «самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и самый общий из существующих, пригодный для деления всех возможных чисел», – все же я не решаюсь его изложить здесь, опасаясь, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скучном месте и не станет читать дальше. Между тем этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху, а у нас в России употреблялся до середины XVIII века: в «Арифметике» Магницкого он описан в числе шести предлагаемых там способов (из которых ни один не похож на современный) и особенно рекомендуется автором; Магницкий на протяжении своей объемистой книги – 640 страниц огромного формата – пользуется исключительно «способом галеры», хотя и не употребляет этого наименования.

В заключение покажем читателю эту числовую «галеру», воспользовавшись примером из упомянутой книги Тартальи:



Мудрый обычай старины

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали естественное недоверие к их результатам. На длинном, извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай проверять каждое выполняемое арифметическое действие – похвальное правило, следовать которому не мешало бы и нам.

Любимым приемом проверки был так называемый способ 9, – очень изящный прием, который полезно и теперь знать каждому. Он нередко описывается в современных арифметических учебниках, особенно иностранных, но почему-то теперь малоупотребителен на практике, что, впрочем, не умаляет его достоинств.

Проверка девяткой основана на «законе остатков», гласящем: остаток от деления суммы на какое-либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число; точно так же, остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также[14], что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; например, 758 при делении на 9 дает 2, и столько же получается в остатке от деления (7 + 5 + 8) на 9. Сопоставив оба свойства чисел, мы и приходим к приему проверки девяткой, т. е. делением на 9.

Пусть требуется проверить правильность сложения следующего столбца:

38932	7
1096	7
4710043	1
589106	2
5339177	8

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся числах также складываем цифры (это делается в самом процессе сложения цифр), пока, в конечном результате, не получим однозначного числа. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с

соответствующим слагаемым. Складываем все остатки – получаем 8. Такова же должна быть сумма цифр итога (5339177), если действие выполнено верно:

5 + 3 + 3 + 9+1 + 7 + 7 после всех упрощений, равно 8 (точнее: «равноостаточно с 8»).

Проверка вычитания выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность – за слагаемое. Например:

$$\begin{array}{r} 6913 \ldots\ldots\ldots 1 \\ - \\ \underline{2587} \ldots\ldots\ldots \underline{4} \\ 4326 \qquad\qquad\quad 6 \end{array}$$

4 + 6 = 10, т. е. 1.

Не сложна и проверка умножения, как видно из следующего примера:

$$\begin{array}{r} 8713 \ldots\ldots\ldots 1 \\ \times \\ \underline{264} \ldots\ldots\ldots \underline{3} \\ 34852 \qquad\qquad 3 \\ 52278 \\ \underline{17426} \\ 2300232 \ldots\ldots\ldots 3 \end{array}$$

Если при такой проверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то, чтобы определить, где именно ошибка находится, можно проверить способом девятки каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, надо проверить еще и сложение частных произведений. Такая проверка сберегает время и труд, конечно, только при умножении многозначных чисел; при малых числах проще заново выполнить действие.

Проверка деления по этому способу требует маленького пояснения. Если имеем случай деления без остатка, то проверка производится, как и при умножении: делимое рассматривается как произведение делителя на частное. В случае же деления с

остатком пользуются тем, что делимое = делителю × частное + остаток. Например:

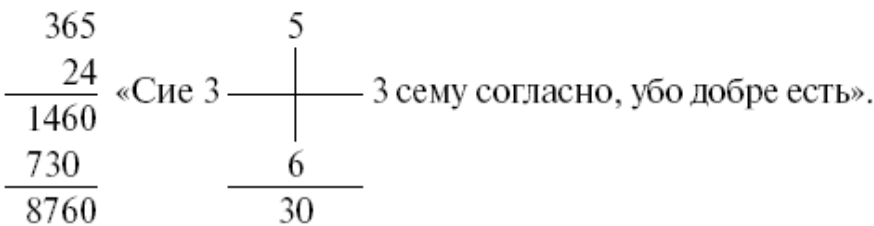
16201387 : 4457 = 3635; остаток 192

сумма цифр 1 2 8 3

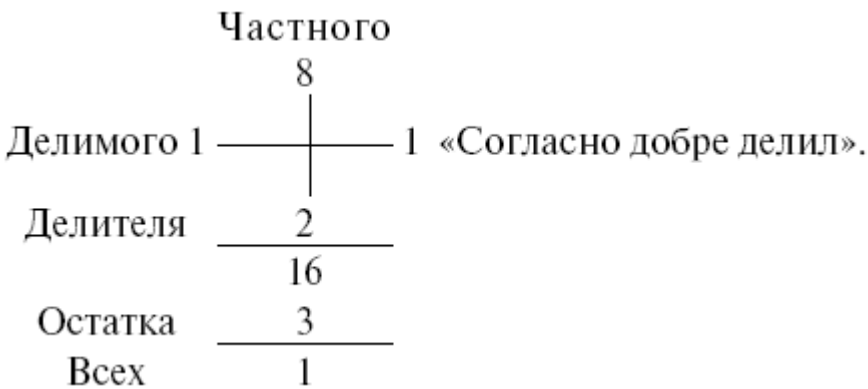
$2 \times 8 + 3 = 19; 1 + 9 = 10; 1 + 0 = 1.$

В «Арифметике» Магницкого предлагается для проверки девяткой следующее удобное расположение:

Для умножения:



Для деления:



Подобная проверка, без сомнения, не оставляет желать лучшей в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее надежности: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, ведь одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; поэтому не только перестановка цифр, но иной раз даже и замена одних цифр другими остаются при такой проверке необнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, так как они не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием проверки было бы неосмотрительно. Предки наши сознавали это и не

ограничивались одною лишь проверкой с помощью девятки, но производили еще дополнительную проверку – чаще всего с помощью семерки. Этот прием основан на том же «правиле остатков», но не так удобен, как «способ девятки», потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (причем легко возможны ошибки в действиях самой проверки). Две проверки – девяткой и семеркой – уже являются гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной проверки, то будет уловлено другою. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратна числу $7 \times 9 = 63$. Так как это все же случайно возможно, то и двойная проверка не может дать полной уверенности в правильности результата.

Впрочем, для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на 1 или на 2 единицы, можно ограничиться только проверкою девяткой. Дополнительная проверка семеркой чересчур обременительна. Всякий контроль хорош только тогда, когда не мешает работе.

«Русский» способ умножения

В некоторых местностях у наших крестьян приходится иногда наблюдать применение очень остроумного способа умножения целых чисел, который не похож на обычный школьный прием и унаследован, по-видимому, от глубочайшей древности. Способ это интересен тем, что, пользуясь им, можно обходиться без таблицы умножения, так как умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоении другого числа.

Вот пример:
32×13
16×26
8×52
4×104
4×208
1×416

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Основание этого приема очевидно: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой вдвое увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение:

$32 \times 13 = 1 \times 416.$

Но как поступать, если приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо – гласит правило, – в случае нечетного числа откинуть единицу и остаток делить пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет прибавить все те числа этого столбца, которые стоят против нечетных чисел левого столбца: сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат налево нечетное число. Приведем пример (звездочка указывает, что данную строку надо зачеркнуть):

19×17

9 × 34
4 × 68*
2 × 136*
1 × 272

Сложив незачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат:

$$\begin{array}{r} 17 \\ 34 \\ \underline{272} \\ 323 \end{array}.$$

Нетрудно понять полную теоретическую обоснованность этого приема, если принять во внимание, что

19 × 17 = (18 + 1) 17 = 18 × 17 + 17
9 × 34 = (8 + 1) 34 = 8 × 34 + 34 и т. п.

Ясно, что числа – 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.

Нельзя, как видите, отказать в практичности этому народному приему умножения, который один научный английский журнал («Knowledge» – знание) окрестил «русским крестьянским» способом.

Из Страны пирамид

Весьма вероятно, что способ этот дошел до нас из глубочайшей древности и притом из отдаленной страны – из Египта. Мы мало знаем, как считали и производили действия обитатели древней Страны пирамид. Но сохранился любопытный памятник – папирус, на котором записаны арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ древнего Египта; это так называемый папирус Ринда, относящийся ко времени между 2000 и 1700 гг. до нашей эры[15] и представляющий собою копию еще более древней рукописи, переписанную неким Аамесом. Писец[16] Аамес, найдя «ученическую тетрадку» этой отдаленнейшей эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера – вместе с их ошибками и исправлениями учителя – и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

«Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей… всех тайн, сокрытых в вещах.

Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Аамесом».

В этом интересном документе, насчитывающем за собою около 40 веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера (№ 48, 50, 66 и 79 по нумерации Эйзенлора) умножения, выполненных по способу, живо напоминающему наш русский народный способ. Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множителя; знаком + мы отметили числа, подлежащие сложению):

(8×8)	(9×9)
. 8	. 9 +
. . . 16	. . 18
. . . . 32	 36
: : : : 64	: : : : 72 +
	Итог 81

(8 × 365)	(7 × 2801)
. 365	
. . 730	. 2801 +
. . . . 1460	. . 5602 +
: : : : 2920	. . . . 11204 +
	Итог 19607

Вы видите из этих примеров, что еще за тысячелетия до нас египтяне пользовались приемом умножения, сходным с нашим крестьянским, и что неведомыми путями он как бы перекочевал из древней Страны пирамид в современную русскую деревню. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например, 19 × 17, он произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд последовательных удвоений числа 17:

1	17 +
2	34 +
4	68
8	136
16	272 +

и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь знаком +, т. е. 17 + 34 + 272. Он получил бы, конечно, вполне правильный результат: 17 + (2 × 17) + (16 × 17) = = 19 × 17. Легко видеть, что подобный прием по существу весьма близок к нашему «крестьянскому» (замена умножения рядом последовательных удвоений).

Трудно сказать, у одних ли русских крестьян сохранился в настоящее время такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно «русским крестьянским способом»; в Германии простой народ кое-где хотя и пользуется им, но также называет его «русским».

Чрезвычайно интересно было бы получить от читателей сведения о том, применяется ли в их местности этот древний способ умножения, имеющий за собой такое долгое и оригинальное прошлое.

Следовало бы вообще с большим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники

народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины. На это уже давно указывал покойный историк математики В.В. Бобынин, предложивший даже краткую программу собирания памятников народной математики. Нелишним будет привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать: 1) Счисление и счет. 2) Приемы меры и веса. 3) Геометрические сведения и их выражение в постройках, нарядах и украшениях. 4) Способы межевания. 5) Народные задачи. 6) Пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям. 7) Памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д., или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и пр.

Глава V Недесятичные системы счисления

Загадочная автобиография

Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал лет пятнадцать тому назад для читателей одного распространенного тогда журнала[17] в качестве «задачи на премию». Вот она:

Загадочная автобиография

В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она начиналась следующими строками:

«Я окончил курс университета 44-х лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 11 лет, – способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из которых $^1/_{10}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц» и т. д.

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?

Решение задачи подсказывается названием этой главы: недесятичная система счисления – вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа чудаком-математиком. Секрет выдается фразой: «Спустя год (после 44-летнего возраста), 100-летним молодым человеком…» Если от прибавления одной единицы число 44 преображается в 100, то, значит, цифра 4 – наибольшая в этой системе (как 9 – в десятичной), а следовательно, основанием системы является 5. Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по пятиричной системе счисления, т. е. по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего; на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором – не десятки, а пятерки; на третьем не сотни, а «двадцати-пятерки», и т. д. Поэтому число, изображенное в тексте записки «44», означает не $4 \times 10 + 4$, как в десятичной системе, а $4 \times 5 + 4$, т. е. двадцать четыре. Точно так же число «100» в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в

пятиричной системе, т. е. 25. Остальные числа записки соответственно означают

$$
\begin{aligned}
&\text{«}\ 34\text{»} = 3 \times 5 + 4 = 19\\
&\text{«}\ 11\text{»} = 5 + 1 = 6\\
&\text{«}200\text{»} = 2 \times 25 = 50\\
&\text{«}\ 10\text{»} = 5\\
&\text{«}\,{}^{1}/_{10}\text{»} = {}^{1}/_{5}\\
&\text{«}130\text{»} = 25 + 3 \times 5 = 40
\end{aligned}
$$

Восстановив истинный смысл чисел записки, мы видим, что в ней никаких противоречий нет:

Я окончил курс 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 6 лет – способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал 50 рублей, из которых $^{1}/_{5}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 рублей.

Трудно ли изображать числа в других системах счисления? Ничего не может быть легче. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятиричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц первого разряда:

119: 5 = 23, остаток 4.

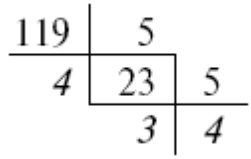
Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятиричной системе – 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5:

23: 5 = 4, остаток 3.

Это показывает, что во втором разряде («пятерок») будет цифра 3, а в третьем («двадцати-пятерок») – 4.

Итак, 119 = 4 × 25 + 3 × 5 + 4, или в пятиричной системе «434».

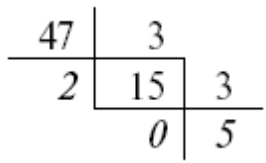
Сделанные действия для удобства располагают так:



Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево и сразу получают искомое изображение числа в иной системе.

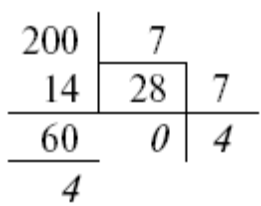
Приведем еще примеры.

1) Изобразить 47 в третичной системе:



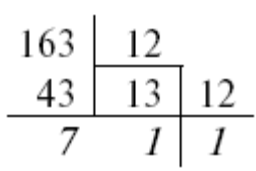
Ответ: «502». Проверка: $5 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$.

2) Число 200 изобразить в семиричной системе:



Ответ: «404». Проверка: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$.

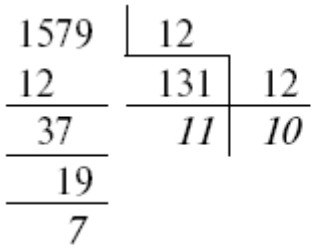
3) Число 163 изобразить в 12-ричной системе:



Ответ: «117». Проверка: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Думаем, что теперь читатель не затруднится изобразить любое число в какой угодно системе счисления. Единственная помеха может возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых случаях не будет доставать изображений для цифр. В самом деле: при изображении числа в системах с основанием более десяти (например, в 12-ричной), может явиться надобность в цифрах, соответствующих числам десять и одиннадцать. Но из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для этих новых цифр какие-

нибудь условные знаки или буквы, – хотя бы, например, буквы *кил,* стоящие в русском алфавите на 10-м и 11-м месте. Так, число 1579 в двенадцатиричной системе изобразится следующим образом:



«(10) (11)7», или *кл* 7.

Проверка: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1579$.

Простейшая система счисления

Вообще нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Например, в десятичной системе высшая цифра 9, в 6-ричной – 5, в троичной – 2, в 15-ричной – 14, и т. д.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется всего меньше цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (считая и 0), в пятиричной – всего 5 цифр, в троичной – 3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной – только 2 цифры (цифры 1 и 0). Существует ли и «единичная» система? Конечно: это система, в которой единицы высшего разряда в один раз больше единицы низшего, т. е. равны ей; другими словами, «единичной» можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют одинаковое значение. Это самая примитивная «система»; ею пользуется первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу сосчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: в ней нет главной особенности нашей нумерации – так называемого поместного значения цифр. Действительно: в «единичной» системе знак, стоящий на 3-м или на 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе единица на 3-м месте (справа) уже в 4 раза больше, чем на первом, а на 5-м – в 16 раз больше. Поэтому система «единичная» дает нам очень мало выгоды, так как для изображения какого-нибудь числа по этой системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов, нужно сто знаков, в двоичной же – только семь («1100100»), а в пятиричной – еще меньше, всего три («400»).

Вот почему «единичную» систему едва ли можно назвать «системой», по крайней мере, ее нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему двоичную, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи 1 и 0 можно изобразить все бесконечное множество чисел! На практике эта система мало удобна – получаются слишком длинные числа[18]; но теоретически она имеет все права считаться простейшей. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной, особенностями этими, между прочим, можно воспользоваться для выполнения целого ряда эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе «Фокусы без

обмана».

Необычайная арифметика

Простые арифметические действия, к которым мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, потребуют от нас немалого напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе. Попробуйте, например, выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по пятиричной системе:

$$\begin{array}{r} \text{«4203»} \\ +\ \underline{\text{«2132»}} \end{array} \qquad \text{(в пятиричной системе).}$$

Складываем по разрядам, начиная с единиц, т. е. справа: 3 + 2 равно пяти, но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятиричной системе не существует: пять есть уже единица высшего разряда. Значит, в сумме вовсе нет единиц: пишем 0, а пять, т. е. единицу следующего разряда, удерживаем в уме. Далее, 0 + 3 = 3, да еще единица, удержанная в уме, – всего

4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем 2 + 1 = 3. В четвертом 4 + 2 равно шести, т. е. 5+1; пишем 1, а 5, т. е. единицу высшего разряда, относим далее влево. Искомая сумма = 11340.

$$\begin{array}{r} \text{«4203»} \\ +\ \underline{\text{«2132»}} \\ \text{«11340»} \end{array} \qquad \text{(в пятиричной системе).}$$

Предоставляем читателю проверить это сложение, предварительно переведя изображенные в кавычках числа в десятичную систему и выполнив то же действие.

Точно так же выполняются и другие действия: для упражнения приводим далее ряд примеров, число которых читатель, при желании, может увеличить самостоятельно:

в пятиричной системе

$$\begin{array}{r} \text{«2143»} \\ -\ \text{«334»} \\ \hline \text{«1304»} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{«213»} \\ \times\ \text{«3»} \\ \hline \text{«1144»} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{«42»} \\ \times\ \text{«31»} \\ \hline \text{«42»} \\ \text{«231»} \\ \hline \text{«2402»} \end{array}$$

в троичной системе

$$\begin{array}{r} \text{«212»} \\ +\ \text{«120»} \\ \hline \text{«201»} \\ \text{«2010»} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{«122»} \\ \times\ \text{«20»} \\ \hline \text{«10210»} \end{array}$$

«220»: 2 = «110»
«201» : 12 = «10» (остаток «11»).

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе. Но можно поступать и иначе: составить «таблицу сложения» и «таблицу умножения» в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно. Например, таблица сложения в пятиричной системе такова:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

С помощью этой таблички мы могли бы сложить числа «4203» и «2132», написанные в пятиричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе, примененном раньше.

Упрощается, как легко понять, также выполнение вычитания.

Нетрудно составить и таблицу умножения («Пифагорову») для пятиричной системы:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Имея эту табличку перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел в пятиричной системе, как легко убедиться, применив ее к приведенным выше примерам. Например, при умножении

в пятиричной системе

$$\begin{array}{r} \text{«213»} \\ \times\ \text{«3»} \\ \hline \text{«1144»} \end{array}$$

рассуждаем так: трижды три «14» (из таблицы); 4 пишем, 1 – в уме. Один на 3 = 3, да еще один, – пишем 4. Дважды три = «11»; 1 – пишем, 1 – переносим влево. Получаем в результате «1144».

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответствующие таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы обе таблицы таковы:

таблица сложения для троичной системы

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Пифагорова таблица для троичной системы

1	2
2	11

Их можно было бы сразу же запомнить и пользоваться ими для выполнения действий. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получаются для двоичной системы:

таблица сложения для двоичной системы

0	1
1	10

таблица умножения для двоичной системы

$1 \times 1 = 1$

При помощи таких-то простых «таблиц» можно выполнять в двоичной системе все четыре действия! Умножения в этой системе, в сущности, как бы вовсе нет: ведь умножить на единицу значит оставить число без изменения, а умножение на «10», «100», «1000» и т. п. сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нулей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно – что в двоичной системе 1 + 1 = 10. Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длина чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий. Пусть, например, требуется умножить:

в двоичной системе

$$\begin{array}{rr} & \text{«1001011101»} \\ \times & \text{«100101»} \\ \hline & \text{«1001011101»} \\ + & \text{«1001011101»} \\ & \text{«1001011101»} \\ \hline & \text{«101011101110001»} \end{array}$$

Выполнение действия сводится только к переписыванию данных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньше умственных усилий, чем умножение тех же чисел в десятичной системе (605 × 37 = 22385). Если бы у нас была принята двоичная система, изучение письменного счисления требовало бы наименьшего умственного напряжения (зато – больше бумаги и чернил). Но в устном счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

Чет или нечет?

Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно – четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число. Скажите, например: четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то, без сомнения, можно утверждать, что это число четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе – то можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

Оказывается, нет. Если основание, например, семь, то «16» означает 7 + 6 = 13, число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число + 6 = нечетному числу).

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на два (последняя цифра четная) безусловно пригоден только для десятичной системы счисления, для других же – не всегда. А именно: он верен только для систем счисления с четным основанием: 6-ричной, 8-ричной и т. п. Каков же признак делимости на 2 для систем с нечетным основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить его: сумма цифр должна быть четной. Например, число «136» четное во всякой системе счисления, даже и с нечетным основанием; действительно, в последнем случае имеем: нечетное число[19] + нечетное число + четное = четному числу.

С такою же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на 5? В 7-ричной или в 8-ричной системе число, так изображенное, на 5 не делится (потому что оно равно девятнадцати или двадцати одному). Точно так же общеизвестный признак делимости на 9 (сумма цифр…) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятиричной системе тот же признак применим для делимости на 4, а, например, в семиричной – на 6. Так, число «323» в пятиричной системе делится на 4, потому что 3 + 2 + 3 = 8, а число «51» в семиричной – на 6 (легко убедиться, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36). Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семиричной системе для вывода признака деления на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$$\left.\begin{aligned} 121 : 11 &= 11 \\ 144 : 12 &= 12 \\ 21 \times 12 &= 441 \end{aligned}\right\}$$ во всех системах счисления (где имеются соответствующие цифры).

Знакомые с начатками алгебры легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут проверить их рядом проб для разных систем счисления.

Дроби без знаменателя

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся только десятичные дроби. Поэтому с первого взгляда кажется, что написать прямо без знаменателя дробь $^2/_7$ или $^1/_7$ нельзя. Дело представится нам, однако, иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в других системах счисления. Что, например, означает дробь «0,4» в пятиричной системе? Конечно, $^4/_5$. Дробь «1,2» в семиричной системе означает $1^2/_7$. А что означает в той же семиричной системе дробь «0,33»? Здесь результат сложнее: $^3/_7 + {}^3/_{49} = {}^{24}/_{49}$.

Рассмотрим еще несколько примеров недесятичных дробей без знаменателя:

«2,121» в троичной системе $2 + {}^1/_3 + {}^2/_9 + {}^1/_{27} = 2^{16}/_{27}$

«1,011» в двоичной системе $1 + {}^1/_4 + {}^1/_8 = 1^3/_8$

«3,431» в пятиричной системе $3 + {}^4/_5 + {}^3/_{25} + {}^1/_{125} = 3^{116}/_{125}$

«2, (5)» в семиричной системе $2 + {}^5/_7 + {}^4/_{49} + {}^5/_{343} + \ldots = 2^5/_6$

В правильности последнего равенства читатель легко может убедиться, если попробует применить к данному случаю, с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных периодических дробей в простые.

ЗАДАЧА-ШУТКА
Какое число делится на все числа без остатка?
(Ответ – на стр. 102.)

Глава VI галерея числовых диковинок

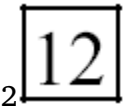
Арифметическая кунсткамера

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие феномены, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода музей числовых редкостей, настоящую «арифметическую кунсткамеру». В витринах подобного музея нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем еще в особой главе, но и числа сравнительно небольшие, выделяющиеся из ряда других какими-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают к себе интерес и внимание; другие открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве. Приглашаю читателя пройтись со мною по галерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам уже знакомы. Мы знаем уже, почему попало в арифметическую кунсткамеру число 2: не потому, что оно первое четное число, а потому, что оно – основание самой удобной системы счисления. Не удивимся мы, встретив здесь 5 – одно из наших любимейших, после десяти, чисел, играющее важную роль при всяких «округлениях», в том числе и при округлении цен, которое обходится нам так дорого.

Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9 – конечно, не как символ постоянства[20], а как число, облегчающее нам проверку арифметических действий. Но вот витрина, за стеклом которой мы видим

число 12

Чем оно замечательно? Конечно, это число месяцев в году и число единиц в дюжине, но что, в сущности, особенного в дюжине? Не многим известно, что 12  – старинный и едва не победивший соперник числа 10 за почетный пост основания системы счисления. Культурнейший народ древнего Востока – вавилоняне и их предшественники, еще более древние первонасельники Двуречья – вели счет в 12-ричной системе счисления. И если бы не пересилившее влияние Индии, подарившей нам десятичную систему, мы, весьма вероятно, унаследовали бы от Вавилона 12-ричную систему. Кое в чем мы и до сих пор платимдань 12-ричной системе, несмотря на победу десятичной. Наше пристрастие к дюжинам и гроссам, наше деление суток на две дюжины часов, деление часа – на 5 дюжин минут, и минуты – на столько же секунд, наше деление круга на 30 дюжин градусов, наконец, деление фута на 12 дюймов и многие другие пережитки глубокой древности – красноречиво свидетельствуют, как велико еще влияние этой древней системы. Надо ли радоваться тому, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя? Конечно, сильными союзницами десятки были и остаются наши собственные руки с десятью пальцами – живые счетные машины. Если бы не это, то следовало бы, безусловно, отдать предпочтение 12 перед 10. Гораздо удобнее производить расчеты по 12-ричной системе, нежели по десятичной. Причина та, что число 10 делится без остатка только на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У 10 всего два делителя, у 12 – четыре. Преимущества 12-ричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в 12-ричной системе число, оканчивающееся нулем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6: подумайте, как удобно дробить число, когда и $^1/_2$, и $^1/_3$, и $^1/_4$ и $^1/_6$ его должны быть целыми числами. А если выраженное в 12-ричной системе число оканчивается двумя нулями, то оно должно делиться без остатка на 144, а следовательно, и на все множители 144, т. е. на следующий длинный ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей – вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в десятичной системе, если оканчиваются

двумя нулями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{20}$ и т. д. превращаются в конечные десятичные; в 12-ричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби, и прежде всего дроби:

$^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{12}$, $^1/_{16}$, $^1/_{18}$, $^1/_{24}$, $^1/_{36}$, $^1/_{48}$, $^1/72$, $^1/_{144}$,

которые соответственно изобразятся так:

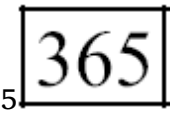
0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1: 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

При таких очевидных преимуществах 12-ричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на 12-ричную систему[21]. Однако мы уже чересчур тесно сжились с десятичной системой, чтобы решаться на такую реформу.

Вы видите, следовательно, что дюжина имеет за собою длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галерее числовых феноменов. Зато его соседка – «чертова дюжина», 13, фигурирует здесь не потому, что она чем-либо замечательна, а потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой: разве не удивительно, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь «страшным» для суеверных людей?

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами

число 365

Оно замечательно не только тем, что определяет число дней в году. Прежде всего, оно при делении на 7 дает в остатке 1. Эта, казалось бы, несущественная особенность числа 365 

имеет большое значение при календарных расчетах: от нее зависит то, что каждый простой (не високосный) год кончается тем днем недели, каким он начался; если, например, день нового года был понедельник, то и последний день года будет понедельник, а следующий год начнется со вторника. По той же причине – благодаря остатку 1 от деления 365 на 7 – было бы нетрудно так реформировать наш календарь, чтобы определенная календарная дата всегда приходилась на один и тот же день недели – например, чтобы 1-го мая каждый год было воскресенье. Для этого достаточно было бы лишь первый день года не вводить в счет числа дней, называть его не «1 января», а просто «новый год»; 1-е января будет уже следующий день. Тогда остальное число дней года, 364, будет заключать целое число недель; следовательно, весь ряд дальнейших лет будет начинаться тем же днем недели, и все даты из года в год будут повторяться в одни и те же дни. В годы високосные, заключающие 366 дней, надо будет первые два дня года поставить вне счета, как праздничные.

Другая особенность числа 365, уже не связанная с календарем, тоже весьма любопытна:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12.$$

То есть, оно равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с десяти:

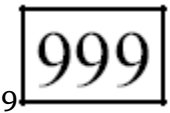
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

Но и это еще не все: оно же равно сумме квадратов двух следующих чисел – 13 и 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

Таких чисел не много наберется в нашей арифметической кунсткамере.

Три девятки

В следующей витрине выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999  . Оно гораздо удивительнее, чем его перевернутое изображение – 666 – знаменитое «звериное число» Апокалипсиса, вселяющее такой страх в суеверных людей, но по арифметическим свойствам ничем не выделяющееся среди остальных чисел.

Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа. Тогда получается шестизначное произведение, первые три цифры которого есть умножаемое число, только уменьшенное на единицу, а последние три цифры – дополнения первых до 9. Например:

$$573 \times 999 = \begin{array}{r} 572 \\ \hline 572427 \\ \hline 999 \end{array}.$$

Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000 - 1) = \left\{ \begin{array}{r} 573000 \\ \hline -\ 573 \\ \hline 572427 \end{array} \right.$$

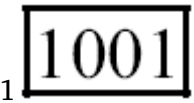
Отсюда вытекает весьма простой прием «мгновенного» умножения любого трехзначного числа на 999:

847 × 999 = 846153; 509 × 999 = 508491; 981 × 999 = 980019 и т. п.

А так как 999 = 9 × 111 = 3 × 3 × 3 × 37, то вы можете, опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые колонны шестизначных чисел, кратных 37, – чего не знакомый со свойствами числа 999, конечно, не в состоянии сделать. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы «мгновенного умножения и деления» не хуже иного

фокусника.

Число Шехеразады



Следующим на очереди у нас 1001, прославленное число Шехеразады. Вы, вероятно, и не подозревали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода чудо, которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками. Чем же так замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых простых чисел: через ячейки Эратосфенова решета оно свободно проскользнуло бы, так как делится без остатка на 7, на 11 и на 13 – на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но в том, что число $1001 = 7 \times 11 \times 13$, нет еще ничего волшебного. Гораздо замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается результат, состоящий из умноженного числа только написанного дважды: например, $873 \times 1001 = 873873$; $207 \times 1001 = 207207$ и т. д. И хотя этого и следовало ожидать, так как $873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 878000 + 873$, – все же, пользуясь указанным свойством числа Шехеразады, можно достичь результатов, совсем неожиданных, – по крайней мере, для человека неподготовленного.

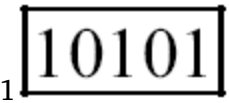
А именно: целое общество непосвященных в арифметические тайны гостей вы можете поразить следующим фокусом. Пусть кто-нибудь напишет на бумажке, секретно от вас, какое хочет трехзначное число и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получится шестизначное число, состоящее из трех повторяющихся цифр. Предложите тому же товарищу или его соседу разделить – по-прежнему секретно от вас – это число на 7, причем вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат деления передается соседу, который по вашему предложению делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка. Полученный результат вы просите передать следующему соседу, которого просите разделить это число на 13 – деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете. Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете первому товарищу со словами:

– Вот число, которое вы задумали!

Этот красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его само значит умножить его на 1001, т. е. на произведение $7 \times 11 \times 13$. Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его само, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13, а после деления последовательно на эти три числа (т. е. на их произведение – 1001) должно снова дать первоначальное число.

Не вправе ли мы после сказанного приравнять число Шехеразады к тем чудесам волшебных арабских сказок, которым мы дивились в детстве? Разница лишь в том, что арифметическое чудо имеет естественное объяснение, а чудеса Востока непостижимы, – да еще и в том, что наше чудо действительно существует, а чудеса волшебных сказок вымышлены…

Число 10101

После сказанного о числе 1001  для вас уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галереи число 10101. Вы догадаетесь, какому именно свойству число это обязано такою честью. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, но не трехзначных, а двузначных чисел: каждое двузначное число, умноженное на 10101, дает в результате само себя, написанное трижды. Например: 73 × 10101 = 737373; 21 × 10101 = 212121. Причина уясняется из следующей строки:

$$73 \times 10101 = 73\,(10000 + 100 + 1) = \left\{ \begin{array}{r} 730000 \\ 7300 \\ +\quad 73 \\ \hline 737373 \end{array} \right. .$$

Можно ли проделывать с помощью этого числа фокусы необычайного отгадывания, как с помощью числа 1001? Конечно, и здесь даже возможно обставить фокус эффектнее, разнообразнее, если иметь в виду, что 10101 есть произведение четырех простых чисел:

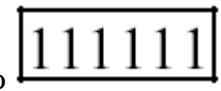
10101 = 3 × 7 × 13 × 37.

Предложив первому гостю задумать какое-нибудь двузначное число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьего приписать то же число еще раз. Четвертого гостя вы просите разделить получившиеся шестизначное число, например, на 7; пятый гость должен разделить полученное частное на 3; шестой гость делит то, что получилось, на 37, и, наконец, седьмой делит этот результат на 13, – причем все 4 деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому гостю: это – задуманное им число.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо множителей 3 × 7 × 13 × 37 можете взять следующие группы множителей: 21 × 13 × 37; 7 × 39 × 37; 3 × 91 × 37; 7 × 13 × 111.

Число это – 10101 – пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее известно своими поразительными свойствами, нежели 1001. А между тем о нем писалось еще двести лет тому назад в «Арифметике» Магницкого, в той главе, где приводятся примеры умножения «с некоим удивлением». Тем с большим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.

Шесть единиц

В соседней витрине мы видим другую диковинку арифметической консткамеры, число  состоящее из шести единиц. Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001, мы сразу соображаем, что

$$111111 = 111 \times 1001.$$

Но $111 = 3 \times 37$, а $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Отсюда следует, что наш новый числовой феномен, состоящий из одних лишь единиц, представляет собою произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти 5 множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем 15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число 111111, а именно:

$3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) = 3 \times 37037 = 111111$
$7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) = 7 \times 15873 = 111111$
$11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) = 11 \times 10101 = 111111$
$13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) = 13 \times 8547 = 111111$
$37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) = 37 \times 3003 = 111111$
$(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) = 21 \times 5291 = 111111$
$(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) = 33 \times 3367 = 111111$
и т. д.

Это значит, что вы можете засадить общество из 15 человек за работу умножения, и хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111111.

То же число, наконец, пригодно и для отгадывания задуманных чисел – наподобие того, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10101. В данном случае нужно предлагать задумывать число однозначное, т. е. цифру, и повторять 6 раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса.

Числовые пирамиды

В следующих витринах галереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода – некоторое подобие пирамид, составленных из чисел. Рассмотрим поближе первую из таких пирамид.

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

Как объяснить эти своеобразные результаты умножения, эту странную закономерность?

Возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой пирамиды 123456 × 9 + 7. Вместо умножения на 9 можно умножить на (10 – 1), т. е. приписать 0 и вычесть умножаемое:

$$123456 \times 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = \begin{cases} 1234567 \\ -\ 123456 \\ \hline 1111111 \end{cases}.$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

Мы можем также понять это, исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида 12345… превратилось в число вида 11111… нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей – 2, из четвертой – 3, из пятой – 4 и т. д. – иначе говоря, вычесть из него то же число вида 12345… но вдесятеро меньшее и предварительно уменьшенное на последнюю цифру. Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за

последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (умножить на 10 и отнять множимое значит умножить на 9). Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды,

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= 9 \\
12 \times 8 + 2 &= 98 \\
123 \times 8 + 3 &= 987 \\
1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\
12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\
123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\
1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\
12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\
123456789 \times 8 + 9 &= 987654321
\end{aligned}
$$

получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр. Особенно интересна в этой пирамиде последняя строка, где в результате умножения на 8 и прибавления 9 происходит превращение полного натурального ряда цифр в такой же ряд, но с обратным расположением.

Необходимость получения таких странных результатов уясняется из следующей строки[22]:

$$
12345 \times 8 + 5 = \left\{ \begin{matrix} 12345 \times 9 + 6 \\ - \\ 12345 \times 1 + 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 111111^{*} \\ - \\ 12346 \end{matrix} \right. ,
$$

то есть 12345 × 8 + 5 = 111111 – 12346. Но, вычитая из числа 111111 число 12346, составленное из ряда возрастающих цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр 98765.

Обоснованность третьей числовой пирамиды, воспроизведенной здесь, есть прямое следствие существования

$$
\begin{aligned}
9 \times 9 + 7 &= 88 \\
98 \times 9 + 6 &= 888 \\
987 \times 9 + 5 &= 8888 \\
9876 \times 9 + 4 &= 888888 \\
98765 \times 9 + 3 &= 8888888 \\
987654 \times 9 + 2 &= 88888888 \\
9876543 \times 9 + 1 &= 888888888 \\
98765432 \times 9 + 0 &= 8888888888
\end{aligned}
$$

первых двух. Связь эта устанавливается очень легко. Из первой пирамиды мы знаем уже, что например:

$12345 \times 9 + 6 = 111111.$

Умножив обе части на 8, имеем:

$(12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888888.$

Но из второй пирамиды мы знаем, что

$12345 \times 8 + 5 = 98765$, или что $12345 \times 8 = 98760.$

Значит:

$888888 = (12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98760 \times 9) + 48 = (98760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98760 + 5) \times 9 + 3 = 98765 \times 9 + 3.$

Вы убеждаетесь, что оригинальные числовые пирамиды не так уже загадочны, как кажутся с первого взгляда. Законы их образования нетрудно уяснить себе, вглядевшись в них повнимательнее. Это не помешало одной немецкой газете несколько лет назад поместить их на своих столбцах с припиской: «Причина такой поразительной закономерности никем еще до сих пор не была объяснена». Вы видите, что здесь и объяснять-то почти нечего.

Девять одинаковых цифр

Последняя строка первой из сейчас (стр. 86) рассмотренных пирамид:

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

объясняет происхождение целой группы интересных арифметических курьезов, собранной в нашем музее в следующую таблицу:

$$\begin{aligned}
12345679 \times\ \ 9 &= 111111111\\
12345679 \times 18 &= 222222222\\
12345679 \times 27 &= 333333333\\
12345679 \times 36 &= 444444444\\
12345679 \times 45 &= 555555555\\
12345679 \times 54 &= 666666666\\
12345679 \times 63 &= 777777777\\
12345679 \times 72 &= 888888888\\
12345679 \times 81 &= 999999999
\end{aligned}$$

Примем во внимание, что

$$12345678 \times 9 + 9 = (12345678 + 1) \times 9 = 12345679 \times 9.$$

Поэтому

$$12345679 \times 9 = 111111111.$$

А отсюда прямо следует, что
$12345679 \times 9 \times 2 = 222222222$
$12345679 \times 9 \times 3 = 333333333$
$12345679 \times 9 \times 4 = 444444444$ и т. д.

Цифровая лестница

Что получится, если число 111111111, с которым мы сейчас имели дело, умножить само на себя? Заранее можно предвидеть, что результат должен быть диковинный, – но какой именно? Если вы обладаете способностью отчетливо рисовать в своем воображении ряды цифр, то вам удастся найти интересующий нас результат, не прибегая к умножению на бумаге. Ведь, в сущности, здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных произведений, потому что умножать приходится все время лишь единицу на единицу – действие, могущее затруднить разве лишь фонвизинского Митрофанушку, размышляющего о результате умножения «единожды один». Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц[23]. Приняв во внимание ступенчатое расположение этих девяти рядов единиц, мы легко можем найти – даже и не выписывая воспроизводимой здесь таблицы, – результат этого единственного в своем роде умножения (при выполнении которого не приходится нигде прибегать к действию умножения): 12345678987654321.

Все девять цифр выстроены в стройном порядке, симметрично убывая от середины в обе стороны.

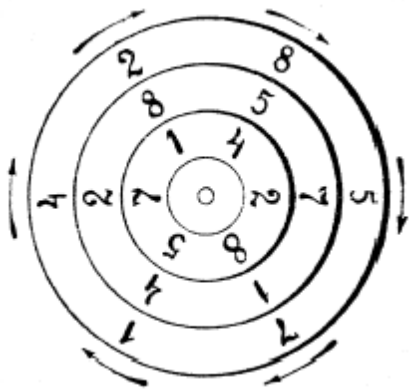
Те из читателей, которых утомило обозрение числовых

диковинок, могут покинуть здесь эту галерею и перейти в следующее отделение арифметической кунсткамеры, где показываются фокусы и выставлены числовые исполины; я хочу сказать, – они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но кто желает познакомиться еще с несколькими интересными достопримечательностями из мира чисел, тех приглашаю осмотреть со мною несколько ближайших витрин.

Магические кольца

Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галереи? Перед нами три плоских кольца, вращающихся одно в другом. На каждом кольце написаны 6 цифр в одном и том же порядке, иначе говоря – написано одно и то же число: 142857

142857. Причина, заставившая поместить эти кольца в нашу арифметическую кунсткамеру, заключается в следующем удивительном свойстве их: как бы ни были повернуты кольца, мы при сложении двух написанных на них чисел – считая от любой цифры в направлении начерченной стрелки – во всех случаях получим… то же самое шестизначное число (если только результат вообще будет 6-значный), лишь немного подвинутое!



Магические кольца

В том, например, положении, какое изображено на прилагаемом чертеже, мы имеем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ +\ 428571 \\ \hline 571428 \end{array},$$

т. е. опять-таки тот же ряд цифр: 142857, только цифры 5 и 7 перенеслись в начало.

При другом расположении колец относительно друг друга мы имеем, например:

$$\begin{array}{r} 285714 \\ +\ 571428 \\ \hline 857142 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 714285 \\ +\ 142857 \\ \hline 857142 \end{array}.$$

Исключение составляет лишь единственный случай, когда в результате получается 999999 (складываемые цифры дополняют друг друга до девяти):

$$\begin{array}{r} 285714 \\ +\ 714285 \\ \hline 999999 \end{array}.$$

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности мы получим и при вычитании чисел, написанных на кольцах. Например:

$$\begin{array}{r} 428571 \\ -\ 142857 \\ \hline 285714 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 571428 \\ -\ 285714 \\ \hline 285714 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 714285 \\ -\ 142857 \\ \hline 571428 \end{array}.$$

Исключение составляет случай, когда приведены к совпадению одинаковые цифры – тогда, разумеется, разность равна нулю.

Но и это еще не все замечательные свойства нашего числа 142857. Умножьте его на 2, на 3, на 4, на 5 или на 6 – и вы получите, как и раньше, снова то же число, лишь передвинутое, в круговом порядке, на одну или несколько цифр:

$142857 \times 2 = 285714$
$142857 \times 3 = 428571$
$142857 \times 4 = 571428$
$142857 \times 5 = 714285$
$142857 \times 6 = 857142$

Вы видите, что произведение отличается от умножаемого лишь порядком цифр: группа цифр, стоящих впереди, очутилась на конце.

Пора, однако, объяснить, чем же обусловлены все загадочные особенности этого числа. Мы нападем на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7: в результате получится 999999. Значит, число

наше – не что иное, как седьмая часть 999999, т. е. дробь $^{142857}/_{999999} = {}^{1}/_{7}$. И действительно, если вы станете превращать $^{1}/_{7}$ в десятичную дробь, вы получите:

$$
\begin{array}{l}
1:7 = 0{,}142857 \ \ldots \text{ то есть } {}^{1}/_{7} = 0,\,(142857). \\
\underline{10} \\
\quad 30 \\
\quad \underline{28} \\
\quad\ \ 20 \\
\quad\ \ \underline{14} \\
\quad\ \ \ 60 \\
\quad\ \ \ \underline{56} \\
\quad\ \ \ \ 40 \\
\quad\ \ \ \ \underline{35} \\
\quad\ \ \ \ \ 50 \\
\quad\ \ \ \ \ \underline{49} \\
\quad\ \ \ \ \ \ 1
\end{array}
\ .
$$

Наше загадочное число есть, следовательно, период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении $^{1}/_{7}$ в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место. Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным $^{2}/_{7}$ и, следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не $^{1}/_{7}$, а $^{2}/_{7}$ Начав же превращать дробь $^{2}/_{7}$ в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2 – один из тех остатков, которые у нас получались уже при превращении $^{1}/_{7}$: ясно, что должен поэтому повториться прежний ряд цифр частного, но он начнется с другой цифры; другими словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце. То же самое должно произойти и при умножении на 3, на 4, на 5 и на 6, т. е. на все числа, получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить целую единицу, – т. е. 0,9999… если представить ее в виде бесконечной периодической дроби.

Любопытные результаты сложения и вычитания чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что 142857 есть период дроби, равной $^{1}/_{7}$. В самом деле: что мы делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Мы переставляем группу цифр спереди на конец, т. е., согласно только что сказанному, мы умножаем число 142857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно, все действия сложения или вычитания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей $^{1}/_{7}$, $^{2}/_{7}$,$^{3}/_{7}$ и т. д. В результате мы должны получить, конечно, несколько седьмых долей, – т. е. опять-таки наш ряд цифр 142857 в той или иной круговой перестановке. Отсюда надо исключить лишь случаи, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают 1 или больше 1.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда, не тождественный с рассмотренными ранее, но все же весьма сходный с ними. Рассмотрим внимательнее, какой результат должен получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, т. е. на 8, на 9 и т. д. Умножить 142857, например, на 8, мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (т. е. к 999999) прибавить наше число

142857 × 8 = 142857 × 7 + 142857 = 999999 + 142857 = 1000000 – 1 + 142857 = 1000000 + (142857 – 1).

Окончательный результат – 1142856 – отличается от умножаемого 142857 только тем, что впереди стоит еще одна единица, а последняя цифра на единицу же уменьшена. По сходному правилу составляются произведения 142857 на всякое другое число, большее 7, – как легко усмотреть из следующих строк:

142807 × 8 = (142857 x 7) +142857 =1000000-1 + 142857=1142856
142857 × 9 = (142857 × 7) + (142857 × 2) = 1000000—1+ 285714= 1285713
142857 × 10 = (142857 × 7) + (142857 × 3) = 1000000-1 +428571 = 1428570
142857 × 16 = (142857 × 7 × 2)+ (142857 × 2) =2000000-2 + 285714 = 2285713
142857 × 39 = (142857 × 7 × 5) + (142857 × 4)=5000000– 5 + 571428 = 5571427

Общее правило здесь такое: при умножении 142857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата[24]. Пусть мы желаем умножить 142857 на 86. Множитель 86 при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 4. Следовательно, результат умножения

12571428– 12= 12571416.

От умножения 142857 × 365 мы получим (так как 365 при делении на 7 дает в частном 52, а в остатке 1):

52142857-52 = 52142803.

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно – нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносно быстрым умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть этого удивительного числа, запомним, что оно произошло от $^1/_7$, или – что то же самое – от $^1/_{14}$; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаются вычитанием первых трех из девяти:

$$\begin{array}{r} 999 \\ 142857\,. \\ \hline 857 \end{array}$$

Мы уже имели дело с такими числами – именно, когда знакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

$$142857 = 143 \times 999.$$

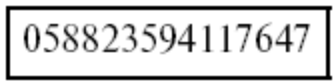
Но $143 = 13 \times 11$. Припомнив замеченное раньше о числе 1001, равном $7 \times 11 \times 13$, мы будем в состоянии предсказать, не выполняя действия, что должно получиться от умножения 142857×7:

$$142857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = 999 \times 1001 = 999999$$

(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

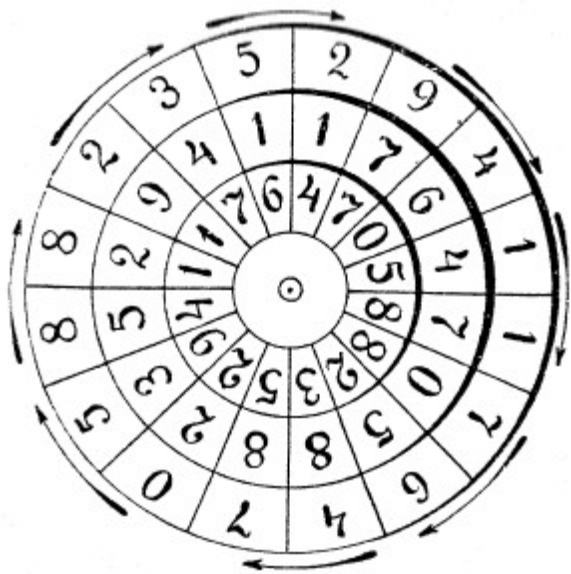
Феноменальная семья

Только что рассмотренное нами число 142857 является одним из членов целой семьи чисел, обладающих теми же свойствами. Вот еще одно такое число 058823594117647



, причем 0 впереди также относится к этому числу. Если умножить это число, например, на 4, мы получим тот же ряд цифр, только первые 4 цифры будут переставлены в конец:

0588235294117647 × 4 = 2352941176470588.



Расположив цифры этого числа на ряде могущих вращаться колец, как в предыдущем случае, – мы при сложении чисел двух колец будем получать то же число, лишь смещенное в круговом порядке:

$$\begin{array}{r} 0588235294117647 \\ +\ 2352941176470588 \\ \hline 2941176470588235 \end{array}.$$

При кольцевом расположении все три ряда, конечно, тождественны.

От вычитания чисел двух колец опять-таки получается тот же круг цифр:

$$\begin{array}{r} 2352941176470588 \\ -\ 0588235294117647 \\ \hline 1764705882352941 \end{array}.$$

Наконец, это число, как и рассмотренное ранее шестизначное, состоит из двух половин: цифры второй половины являются дополнением цифр первой половины до 9.

Нетрудно догадаться, каким образом приведенный числовой ряд оказался столь близким родственником числа 142857; если последнее число представляет собою период бесконечной дроби, равной $^1/_7$, то наше число, вероятно, является периодом какой-нибудь другой дроби. Так оно и есть: наш длинный ряд цифр – не что иное, как период бесконечной дроби, получающейся от превращения в десятичную простой дроби $^1/_{17}$:

$^1/_{17} = 0,(0588235294117647)$.

Вот почему при умножении этого числа на множители от 1 до 16 получается тот же ряд цифр, в котором лишь одна или несколько начальных цифр перенесены в конец числа. И наоборот – перенося одну или несколько цифр ряда из начала в конец, мы тем самым увеличиваем это число в несколько раз (от 1 до 16). Складывая два кольца, повернутых одно относительно другого, мы производим сложение двух умноженных чисел, например, утроенного и удесятеренного – и, конечно, должны получить то же кольцо цифр, потому что умножение на 13 вызывает лишь перестановку группы цифр, незаметную при круговом расположении.

При некотором положении колец получаются, однако, суммы, немного отличающиеся от первоначального ряда. Если, например, мы повернем кольца так, чтобы складывать пришлось шестикратное число с пятнадцатикратным, то в сумме должно получиться число, умноженное на 6 + 15 = 21. А такое произведение, как легко догадаться, составляется уже несколько иначе, чем произведение на множитель меньше 16. В самом деле: так как наше число есть период дроби, равной $^1/_{17}$, то будучи умножено на 17, оно должно дать 16 девяток (т. е. столько, сколько их в подразумеваемом знаменателе периодической дроби), или 1 с 17 нулями минус 1. Поэтому при умножении на 21, т. е. на 4 + 17, мы должны получить четырехкратное число,

впереди которого стоит 1, а от разряда единиц отнято 1. Четырехкратное же число начнется с цифр, получающихся при превращении в десятичную дробь простой дроби $^4/_{17}$.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 17 = 0{,}23\ldots \\ \hline 40 & \\ \hline 60 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

Порядок остальных цифр нам известен: 5294… Значит, 21-кратное наше число будет

2352941176470588,

столько именно и получается от сложения кругов цифр при соответственном их расположении. При вычитании числовых колец такого случая, разумеется, быть не может.

Чисел, подобных тем двум, с которыми мы познакомились, существует множество. Все они составляют словно одно семейство, так как объединены общим происхождением – от превращения простых дробей в бесконечные десятичные. Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Это имеет место только для тех дробей, число цифр периода которых на единицу меньше знаменателя соответствующей простой дроби. Так, например:

$^1/_7$ дает в периоде 6 цифр.
$^1/_{17}$ « « « 16 «
$^1/_{19}$ « « « 18 «
$^1/_{23}$ « « « 22 «

Вы можете убедиться испытанием, что периоды дробей, получающихся от превращения $^1/_{19}$ и $^1/_{23}$ в десятичные, обладают теми же особенностями, как и рассмотренные нами периоды дробей $^1/_7$ и $^1/_{17}$.

Если указанное сейчас условие (относительно числа цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел. Например, $^1/_{13}$ дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

$^1/_{13}$ = 0,076923.

Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

$^2/_{13}$ = 0,153846.

Почему? Потому что среди остатков от деления 1: 13 не было числа 2. Различных остатков было столько, сколько цифр в периоде, т. е. 6; различных же множителей для дроби $^1/_{13}$ у нас 12, – следовательно, не все множители будут среди остатков, а только 6. Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4, 9,10, 12. Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку (076923 × 3 = 230769), на остальные – нет. Вот почему от у получается число, лишь отчасти пригодное для «магического кольца». То же надо сказать и о целом ряде других периодов.

Как бы то ни было, нельзя не согласиться, что длиннейшие периоды бесконечных дробей представляют собою настоящую Калифорнию интереснейших арифметических достопримечательностей.

ОТВЕТ
НА ЗАДАЧУ-ШУТКУ
(предложенную на стр. 73)

Число, которое делится на все числа без остатка, есть —

ˈvəɔnʰ xəɔ ənhəɒəɘɛnodu

Глава VII Фокусы без обмана

Искусство индусского царя

Арифметические фокусы – честные, добросовестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужна ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений. Весь секрет арифметического фокуса состоит в использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для незнающего арифметики самое прозаическое действие, например умножение, кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда выполнение даже обыкновенных арифметических действий над большими числами, знакомое теперь каждому школьнику, составляло искусство лишь немногих и казалось остальным людям какою-то сверхъестественною способностью.

В древнеиндусской повести «Наль и Дамаянти»[25] мы находим отголосок такого взгляда на арифметические действия. Наль, умевший превосходно править лошадьми, возил однажды своего хозяина, царя Ритуперна, мимо развесистого дерева – Вибитаки.

> Вдруг он увидел вдали Вибитаку – ветвисто-густою
> Сенью покрытое дерево. «Слушай, сказал он:
> «Здесь на земле никто не имеет всезнанья; в искусстве
> Править конями ты первый; зато мне далося искусство
> Счета»…

И в доказательство своего искусства царь мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитаке. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и царь соглашается.

> …Лишь только
> Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наля открылись
> Очи, и он все ветки, плоды и листья Вибитаки
> Разом мог перечесть…

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и

терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее на число сучьев дерева (предполагая, что сучья одинаково обросли ветками, а ветки – листьями). Обыкновенное действие умножения казалось незнакомому с ним человеку чем-то загадочным, сверхъестественным.

Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и секрет «фокуса» царя Ритуперна.

Стоит лишь узнать, в чем разгадка фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять, как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого счета. В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и потому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.

Не вскрывая конвертов

Фокусник вынимает стопку из 300 денежных знаков, по 1 рублю каждый, и предлагает вам разложить деньги в 9 конвертах так, чтобы вы могли уплатить ими любую сумму до 300 рублей, не вскрывая ни одного конверта.

Задача представляется вам совершенно невыполнимой. Вы готовы уже думать, что фокусник просто желает поймать вас на недогадливости, что тут дело кроется в какой-нибудь коварной игре слов или неожиданном толковании их смысла. Но вот фокусник, видя вашу беспомощность, сам раскладывает деньги по конвертам, заклеивает их и предлагает вам назвать любую сумму в пределах трехсот рублей.

Вы называете наугад первое попавшееся число – 269.

Фокусник без малейшего промедления подает вам 4 заклеенных конверта. Вы вскрываете их и находите:

В	1-м	—	64 руб.
«	2-м	—	45 «
«	3-м	—	128 «
«	4-м	—	32 «
	Итого		269 руб.

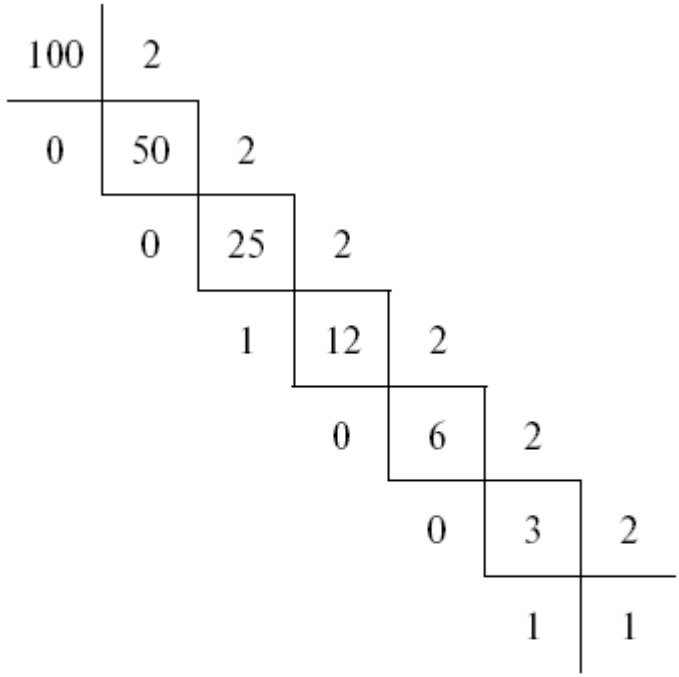
Теперь вы склонны заподозрить фокусника в искусной подмене конвертов и требуете повторения опыта. Фокусник спокойно кладет деньги обратно в конверты, заклеивает и оставляет их на этот раз уже в ваших руках. Вы называете новое число, например 100, или 7, или 293 – и фокусник моментально указывает, какие из лежащих у вас под руками конвертов вы должны взять, чтобы составить требуемую сумму (в первом случае, для 100 р. – 4 конверта, во втором, для 7 р. – 3 конверта, в третьем, для 293 р. – 6 конвертов).

Это представляется чем-то непостижимым; но, прочтя ближайшие полстраницы, вы сможете повторить тот же фокус и изумлять других, еще не посвященных в его секрет. А секрет этот кроется в том, чтобы разложить деньги в следующие стопки: 1 р., 2 р., 4 р., 8 р., 16 р., 32 р., 64 р., 128 р. и, наконец, в последней – остальные рубли, т. е.

$$300-(1 + 2+ 4 +8 + 16 + 32 + 64+ 128) = 300–255 = 45.$$

Из первых 8 конвертов возможно, как нетрудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255; если же задается число большее, то пускают в дело последний конверт, с 45 рублями, а разницу составляют из первых восьми конвертов.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300. Но вас, вероятно, интересует и то, почему собственно ряд чисел 1,2,4, 8,16, 32, 64 и т. д. обладает столь замечательным свойством. Это нетрудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени двух: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 и т. д.[26], и, следовательно, их можно рассматривать как разряды двоичной системы счисления. Атак как всякое число можно написать по двоичной системе, то, значит, и всякое число возможно составить из суммы степеней двух, т. е. из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. И когда вы подбираете конверты, чтобы составить из их содержимого заданное число, вы, в сущности, выражаете заданное число в двоичной системе счисления. Например, число 100 мы легко сможем составить, если изобразим его в двоичной системе:



$$100 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$$
$$64\ \ 32\ (16)\ (8)\ \ 4\ \ (2)\ \ (1)$$
$$100 = 64 + 32 + 4.$$

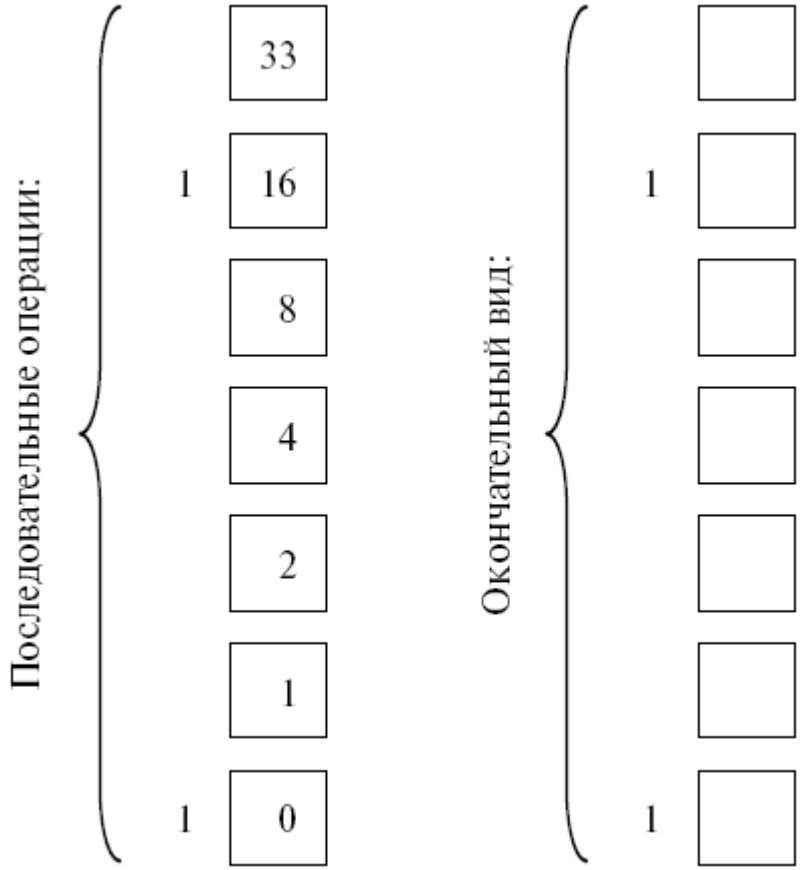
(Напомним, что в двоичной системе на первом месте справа стоят единицы, на втором – двойки, на третьем – четверки, на четвертом – восьмерки и т. д.)

Угадать число спичек в коробке

Тем же свойством двоичной системы счисления можно воспользоваться и для следующего фокуса. Вы предлагаете кому-нибудь взять неполную коробку со спичками, положить ее на стол, а ниже ее положить один за другим 8 бумажных квадратиков. Затем просите в вашем отсутствии проделать следующее: оставив половину спичек в коробке, перенести другую половину на ближайшую бумажку; если число спичек нечетное, то излишнюю спичку положить рядом с бумажкой, налево от нее. Спички, очутившиеся на бумажке, надо (не трогая лежащей рядом) разделить на две равные части: одну половину положить в коробку, другую – переложить на следующую бумажку; в случае нечетного числа остающуюся спичку положить рядом со второй бумажкой. Далее поступать таким же образом, всякий раз возвращая половину спичек обратно в коробку, а другую половину перекладывая на следующую бумажку, не забывая, при нечетном числе спичек, класть одну спичку рядом. В конце концов все спички, кроме одиночных, лежащих рядом с бумажками, возвратятся в коробку.

Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд на пустые бумажки, называете число спичек во взятой коробке.

Этот фокус обыкновенно сильно изумляет непосвященных: кажется совершенно непонятным, как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке. В действительности же «пустые» бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально прочесть искомое число, потому что оно написано на столе – в двоичной системе счисления. Поясним это на примере. Пусть число спичек в коробке было 66. Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на следующих схемах:



Итого……..66.

Не нужно большой проницательности, чтобы сообразить, что проделанные со спичками операции, в сущности, те же самые, какие мы выполнили бы, если бы хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления; окончательная же схема прямо изображает это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за нули, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой, – за единицы. Читая схему снизу вверх, получаем

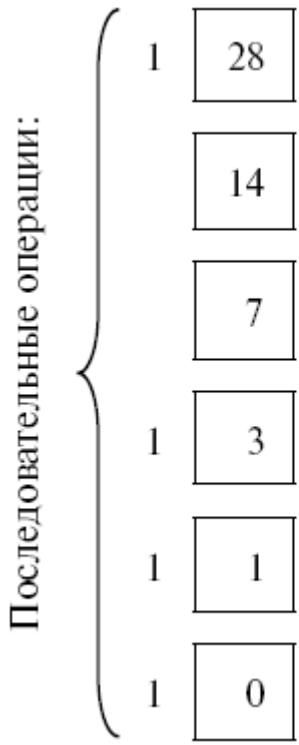
1	0	0	0	0	1	0
64	(32)	(16)	(8)	(4)	2	(1)

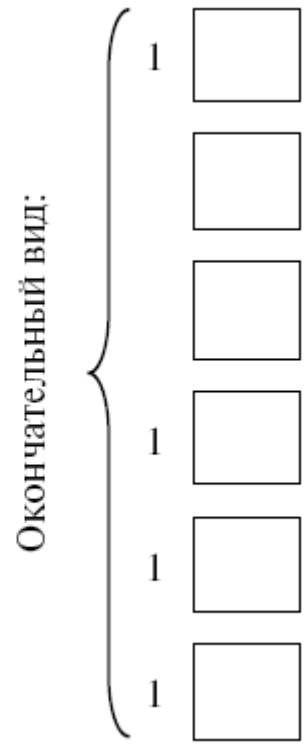
То есть в десятичной: 64 + 2 = 66.
Если бы в коробке было 57 спичек, мы имели бы иные схемы.
Искомое число, написанное по двоичной системе:

1	1	1	0	0	1
32	16	8	(4)	(2)	1

А в десятичной: 33 + 16 + 8 + 1 = 57.

Для разнообразия можно также пользоваться двумя и более спичечными коробками и отгадывать сумму заключающихся в них спичек.



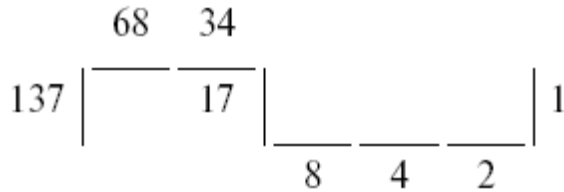


Чтение мыслей по спичкам

Третье видоизменение того же фокуса представляет собою своеобразный способ отгадывания задуманного по спичкам. Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. (от нечетного числа отбрасывая единицу), при каждом делении класть перед собой спичку: направленную вдоль стола, если делится число четное; поперек, если приходится делить нечетное. К концу операции получается фигура вроде следующей:

Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137. Как вы узнаете его?

Способ станет ясен сам собою, если в выбранном примере (137) мы последовательно обозначим возле каждой спички то число, при делении которого она была положена:



Теперь понятно, что так как последняя спичка во всех случаях обозначает число 1, то не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа. Например, по фигуре

вы можете вычислить, что задумано было число 664. В самом деле, выполняя последовательно удвоения (начиная с конца) и не забывая прибавлять в надлежащих местах единицу, получаем:

| = 1
— = 2
| = 5
— = 10
— = 20
| = 41
| = 83
— = 166
— = 332
— = 664

Таким образом, пользуясь спичками, вы прослеживаете ход чужих мыслей, восстановляя всю цепь умозаключений.

Тот же результат мы можем получить иначе, сообразив, что лежащая спичка в данном случае должна соответствовать в двоичной системе нулю (деление на 2 без остатка), а стоящая – единице. Таким образом, в предшествовавшем примере мы имеем (читая справа налево) число

1 0 0 0 1 0 0 1
128 (64) (32) (16) 8 (4) (2) 1

или в десятичной системе так:

128 + 8 + 1 = 137.

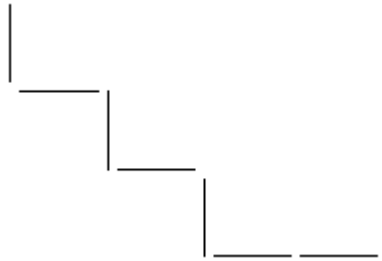
А в последнем примере задуманное число изображается по двоичной системе:

1 0 1 0 0 1 1 0 0 0
512 (256) 128 (64) (32) 16 8 (4) (2) 1

или по десятичной:

512 + 128 + 16 + 8 + 1 = 664.

Еще пример. Какое число было задумано, если из спичек получилась фигура:



Решение: 10010101 в двоичной системе, а в десятичной:

128 + 16 + 4+ 1 = 139.

Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении единица также должна быть отмечаема стоящей спичкой.

Идеальный разновес

У некоторых читателей, вероятно, возник уже вопрос: почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно двоичной системой? Ведь всякое число можно изобразить в любой системе, между прочим, и в десятичной. Чем же объясняется предпочтение двоичной?

Объясняется оно тем, что в этой системе, кроме нуля, употребляется всего одна цифра – единица, а следовательно, число составляется из различных степеней 2, взятых только по одному разу. Если бы в фокусе с конвертами мы распределили деньги, например, по 5-ричной системе, то могли бы составить, не вскрывая конвертов, любую сумму лишь в том случае, когда каждый пакет повторяется у нас не менее 4 раз (в 5-ричной системе, кроме нуля, употребляются ведь 4 цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а троичной системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная «задача о системе гирь», которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

Представьте, что вам предложили придумать систему из 4 гирь, с помощью которых возможно было бы отвесить любое целое число фунтов от 1 до 40. Двоичная система подсказывает вам набор:

1 ф., 2 ф., 4 ф., 8 ф., 16 ф.,

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 фунта. Но это, очевидно, не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 ф. вместо 40 ф.). С другой стороны, однако, вы не использовали здесь предоставляемой весами возможности – класть гири не только на одну чашку весов, но и на две, т. е. пользоваться не только суммою гирь, но и их разностью. Это дает так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно теряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему. Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости подобной задачи таким малым числом гирь, как четыре.

Но посвященный выходит из затруднения с волшебной простотой, намечая следующие 4 гири:

1ф.,3ф.,9ф.,27ф.

Любое целое число фунтов, в пределах одного пуда, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов. Не приводим примеров, потому что каждый легко может убедиться сам в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели. Остановимся лучше на том, почему именно указанный ряд обладает этим свойством. Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти – ряд степеней числа 3[27].

3^0, 3^1, 3^2, 3^3.

Другими словами, мы обращаемся здесь к услугам троичной системы счисления. Но как воспользоваться ею в тех случаях, когда требуемый вес получается в виде разности двух гирь? И как избегнуть необходимости обращаться к удвоению гирь (в троичной системе ведь, кроме нуля, употребляются две цифры: 1 и 2)? То и другое достигается введением «отрицательных» цифр; дело сводится попросту к тому, что вместо цифры 2 употребляют 3–1, т. е. цифру единицы высшего разряда, от которого отнимается одна единица низшего. Например, число 2 в нашей видоизмененной троичной системе обозначится не 2, а 11, где знак минус над цифрой единиц означает, что эта единица не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а $1\bar{1}\bar{1}$ (т. е. 9–3 – 1 = 5). Первые десять чисел изобразятся в этой упрощенной троичной системе следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$1\bar{1}$	10	11	$1\bar{1}\bar{1}$	$1\bar{1}0$	$1\bar{1}1$	$10\bar{1}$	100	101

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе с помощью нуля (т. е. знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы, – то из чисел 1,

3, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Случай сложения отвечает при взвешивании тому случаю, когда все гири помещаются на одну чашку, а случай вычитания – когда гиря кладется на чашку с товаром и, следовательно, вес ее отнимается от веса остальных гирь. Нуль соответствует отсутствию гири.

Применяется ли эта система на практике? Как известно, нет. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27, – хотя первым можно

отвешивать грузы только до 10 единиц, а вторым – до 40. Не применяется набор 1, 3, 9, 27 и там, где еще метрическая система не введена[28]. Причина отказа на практике от этого совершеннейшего разновеса кроется в том, что он удобен только на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотливо. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц – например, отвесить 400 г масла или 2500 г сахара, – то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы еще на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается страшно неудобным: здесь нередко, ради прибавления к поставленным гирям одной единицы, придется произвести полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях крайне медленным и притом утомительным делом – в чем легко убедиться, если, написав обозначения гирь на бумажках, проделать с ними ряд примерных взвешиваний.

Фокусы, основанные на пользовании двоичной и троичной системами счисления, могут быть еще видоизменяемы[29] – но я предоставляю их изобретательности читателя и перехожу к арифметическим фокусам иного рода.

Предсказать сумму ненаписанных чисел

Нас поражает уменье некоторых людей с необыкновенной быстротой складывать столбцы многозначных чисел. Но что сказать о человеке, который может написать сумму еще раньше, чем ему названы все слагаемые? Этот фокус обыкновенно выполняется в таком виде. Отгадчик предлагает вам написать какое-нибудь многозначное число, по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всей будущей колонны слагаемых и передает вам на хранение. После этого он просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое – опять-таки какое угодно. А затем быстро пишет сам третье слагаемое. Вы складываете все три написанных числа – и получаете как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке. Если, например, вы написали в первый раз 83267, то отгадчик пишет будущую сумму 183266. Затем вы пишете, допустим, 27935, а отгадчик приписывает третье слагаемое – 72064:

I . . . . . Вы: 83267
III . . . . . Вы: 27935
IV . . .Отгадчик: 72064
II. . . . . Сумма 183266

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое. Отгадчик может предсказать также сумму 5 или 7 слагаемых, – но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане. Очевидно, отгадчик пользуется здесь каким-то неизвестным вам свойством чисел.

Так оно и есть. Отгадчик пользуется тем, что от прибавления, скажем, к 5-значному числу числа из пяти девяток (99999) первое число увеличивается на 1000000 – 1, т. е. впереди него появляется единица, а последняя цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r} 83267 \\ +\ 99999 \\ \hline 183266 \end{array}.$$

Это число – т. е. сумму написанного вами числа и 99999 – отгадчик и пишет на бумажке как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое, третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99999, т. е. вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9. Эти операции вы легко можете теперь проследить на предыдущем примере, – а также и на следующих примерах

I	Вы:	379264	I	Вы:	9935
III	Вы:	4873	III	Вы:	5669
IV	Отгадчик:	995126	IV	Отгадчик:	4330
II	Сумма	1379263	II	Сумма	19934

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если ваше второе слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемого, которое уменьшит ваше второе число для оправдания предсказанного им слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предупредительно ограничивает свободу вашего выбора этим условием.

Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвует несколько лиц. После первого же слагаемого – например, 437692, отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, а именно записывает 2437690 (здесь будет добавлено дважды 999999, т. е. 2000000 – 2). Дальнейшее ясно из схемы:

I	Вы написали:	437692
III	Другой написал:	822531
V	Третий написал:	263009
IV	Отгадчик добавил:	177468
VI	« «	736990
II	« предсказал:	2437690

Предугадать результат ряда действий

Большое впечатление производят те арифметические фокусы, в которых отгадчик угадывает результат действий над совершенно неизвестными ему числами. Подобных фокусов существует много, и все они основаны на возможности придумать такой ряд арифметических действий, результат которых не зависит от чисел, над которыми они производятся.

Вот один из фокусов этого рода.

Признак делимости на 9 всем известен: число кратно 9, если сумма его цифр кратна 9. Припомнив, как выводится это правило, мы запасаемся еще и другим интересным положением: если от числа отнять сумму его цифр, то получается остаток, кратный 9 (положение это доказывается попутно при выводе признака делимости на 9). Точно так же мы получим число, кратное 9, если отнимем от данного числа другое, которое составлено из тех же цифр, но размещенных в другом порядке. Например: 457 – (4 + 5 + 7) = 441, т. е. числу, кратному 9; или: 7843–4738 = 3105, числу, кратному 9[30].

Уже и сказанным можно непосредственно воспользоваться для выполнения несложного фокуса. Предложите товарищу задумать любое число; затем, переставив его цифры в ином, каком угодно порядке, вычесть меньшее число из большего. В полученном результате ваш товарищ зачеркивает одну цифру – безразлично какую – и читает вслух оставшиеся цифры; а вы сразу же называете скрытую от вас, зачеркнутую сумму. Как вы отгадываете ее? Очень просто: вы знаете, что результат должен быть кратен 9, т. е. сумма его цифр должна без остатка делиться на 9. Быстро сложив в уме прочитанные вам цифры, вы легко можете сообразить, какой цифры не хватает, чтобы сумма была кратна 9. Например: задумано число 57924: после перестановки получено 92457.

$$\begin{array}{r} 92457 \\ -\ 57924 \\ \hline 3?533 \end{array}$$

Вычитание дает результат 3?533, в котором знак вопроса стоит на месте зачеркнутой цифры. Сложив цифры 3 + 5 + 3 + 3, получаем 14. Нетрудно сообразить, что зачеркнута была цифра 4, потому что ближайшее большее число, кратное 9, есть 18, а 18-4 = 14.

Но тот же фокус можно обставить гораздо более эффектно, именно так, чтобы отгадать число, ничего не спрашивая у загадчика. Для этого проще всего предложить задумать

трехзначное число с неодинаковыми крайними числами; затем, переставив цифры в обратном порядке, вычесть меньшее число из большего; в полученном результате переставить цифры и сложить оба числа. Окончательный результат всего этого ряда перестановок, вычитания и сложения вы называете изумленному загадчику без малейшего промедления или даже вручаете ему заранее в заклеенном конверте.

Секрет фокуса прост: какое бы число ни было задумано, в результате перечисленных действий всегда получается одно и то же: 1089. Вот несколько примеров:

762	431	982	291
− 267	− 134	− 289	− 192
495	297	693	099
+ 594	+ 792	+ 396	+ 990
1089	1089	1089	1089

(Последний пример показывает, как должен поступать загадчик, когда разность получается двузначная.)

Всматриваясь внимательно в ход выкладок, вы, без сомнения, поймете причину такого однообразия результатов. При вычитании неизбежно должна получаться в разряде десятков цифра 9, а по сторонам ее – цифры, сумма которых = 9. При последующем сложении должна поэтому получиться на первом справа месте цифра 9, далее, от 9 + 9, цифра 8 и единица в уме, которая при сложении с девятью сотнями дает 10. Отсюда – 1089.

Если вы станете повторять этот опыт несколько раз кряду, не внося в него никаких изменений, то секрет ваш, разумеется, будет раскрыт: загадчик сообразит, что постоянно получается одно и то же число 1089, хотя, быть может, и не отдаст себе отчета в причине такого постоянства. Вам необходимо поэтому видоизменять фокус. Сделать это нетрудно, так как $1089 = 33 \times 33 = 11 \times 11 \times 3 \times 3 = 121 \times 9 = 99 \times 11$. Достаточно поэтому просить загадчика, когда вы доведете его до числа 1089, разделить этот результат на 33, или на 11, или на 121, или на 99, или на 9, – и тогда лишь назвать ему получающееся число. У вас, следовательно, в запасе имеется 5 изменений фокуса, – не говоря уже о том, что вы можете просить загадчика также умножить сумму на любое чисто, мысленно выполняя то же самое действие.

Мгновенное деление

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на уже знакомом нам свойстве множителя, состоящего из ряда девяток: при умножении на него числа с таким же числом цифр получается результат, состоящий из двух половин: первая половина представляет собою умножаемое число, уменьшенное на единицу, вторая – результат вычитания первой половины из множителя. Например: 247 × 999 = 246753; 1372 × 9999 = 13718628 и т. п. Причину легко усмотреть из следующей строки:

247 × 999 = 247 × (1000 – 1) = 247000 – 247 = 246999 – 246.

Пользуясь этим, вы предлагаете целой группе товарищей произвести деление многозначных чисел – одному 68933106: 6894, другому 8765112348: 9999, третьему 543456: 544, четвертому 12948705: 1295 и т. д., – а сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И прежде чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления: первому – 9999, второму – 87652, третьему – 999, четвертому – 9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого вам достаточно лишь воспользоваться некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в «Галерее числовых диковинок» (см. главу VI).

Любимая цифра

Попросите кого-нибудь назвать его любимую цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

– Вот удивительно! – восклицаете вы. – Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр.

– Чем же она замечательна? – осведомляется ваш озадаченный собеседник.

– А вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру 6 на 9 и полученное число 54 подпишите множителем под числом 12345679:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times \quad 54 \\ \hline \end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение – и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр:

6666666666

– Вот видите, какой у вас тонкий арифметический вкус, – заканчиваете вы. – Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь удивительным свойством!

Но точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он возлюбил какую-нибудь другую из девяти значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 4 \times\ 9 \\ \hline 4444444444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 7 \times\ 9 \\ \hline 777777777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 9 \times\ 9 \\ \hline 999999999 \end{array}$$

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12345679 в «Галерее числовых диковинок».

Угадать день рождения

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменяемы на разные лады. Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но именно потому и производящий эффектное впечатление.

Допустим, что вы родились 18 мая 1903 года и что вам теперь 20 полных лет. Но я не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц) я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (20).

Когда вы все это проделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по 2 цифры в каждой: получаю сразу как день и месяц вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно. Проделаем указанные вычисления:

$5 \times 100 = 500$
$500 + 18 = 518$
$518 \times 2 = 1036$
$1036 + 8 = 1044$
$1044 \times 5 = 5220$
$5220 + 4 = 5224$
$5224 \times 10 = 52240$
$52240 + 4 = 52244$
$52244 + 20 = 52264$

Произведя вычитание 52264 – 444, получаем число 51820.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

5-18-20,

т. е. 5-го месяца (мая), числа 18; возраст 20 лет.

Секрет нашего фокуса легко понять из рассмотрения следующего равенства:

$$\left\{\left[(100m+t)\times 2+8\right]\times 5+4\right\}\times 10+4+n-444=10000m+$$
$$+100t+n.$$

Здесь буква m обозначает порядковый номер месяца, t — число месяца, n — возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая – то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения. В выражении $10000m + 100t + n$ ни m, ни t, ни n не могут быть более чем двузначными числами; поэтому число, получающееся в результате, всегда должно, при делении на грани, по две цифры в каждой, распасться на три части, выраженные искомыми числами m, t и n.

Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения этого фокуса, т. е. другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

Одно из «утешных действ» Магницкого

Читателю же предлагаю раскрыть также секрет следующего незамысловатого фокуса, который описан еще в «Арифметике» Магницкого, в главе: «Об утешных некиих действиях чрез арифметику употребляемых».

Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к «каковой-либо иной числимой вещи». Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (т. е. 5-го пальца) 4-го из 8 человек. Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из восьми человек (обозначенных номерами от 1 до 8), на каком пальце и на котором суставе находится перстень?

«Он же рече: кто-либо от вас умножи онаго который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умнож чрез 5, также приложи перст на нем же есть перстень (т. е. к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи чрез 10, и приложи сустав на нем же перстень взложен, и от сих произведенное число скажи ми, по немуже искомое получиши.

4 лиц
2 множи
8
5 приложи
13
5 множи
65
5 приложи перст
70
10 множи
700
сустав 2 приложи
702
250
452

Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека который взял перстень, и прочая вся, яже велеше им; якоже явлено есть: из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, т. е. 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав».

Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачи совершенно подобного же рода имеются уже в одном из первых сборников математических

развлечений, именно у Баше-де-Мезирьяка в его книге «Занимательные и приятные числовые задачи», вышедшей в 1612 году. Нужно вообще заметить, что большая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$95 + 1 + {}^{6}/_{7} + {}^{4}/_{28} + 3 = 100$

$98 + 1 + {}^{3}/_{6} + {}^{27}/_{54} = 100$

Подыщите еще и другие способы составления числа 100 с помощью девяти значащих цифр, употребленных по одному разу.

(См. стр. 161.)

Глава VIII Быстрый счет и вечный календарь

Вам, быть может, приходилось слышать или даже присутствовать самим на сеансах «гениальных математиков», вычисляющих в уме с поразительной быстротой, сколько вам недель, дней, минут, секунд, в какой день недели вы родились, какой день будет такого-то числа такого-то года и т. п. Чтобы выполнить большую часть этих вычислений, вовсе не нужно, однако, обладать необычайными математическими способностями. То же самое, после недолгого упражнения, может проделать и каждый из нас. Нужно только знать кое-какие секреты этих фокусов, – разоблачением которых мы сейчас и займемся.

«Сколько мне недель?»

Чтобы научиться по числу лет быстро определять число заключающихся в них недель, нужно только уметь ускоренно множить на 52, т. е. на число недель в году.

Пусть дано перемножить 36 × 52. «Счетчик» сразу же, без заминки, говорит вам результат: 1872. Как он его получил? Довольно просто: 52 состоит из 50 и 2; 36 умножается на 5 через деление пополам; получается 18 – это две первые цифры результата; далее умножение 36 на 2 делается как обыкновенно; получают 72, которые и приписываются к прежним 18: 1872.

Легко понять, почему это так. Умножить на 52 значит умножить на 50 и 2; но, вместо того, чтобы умножить на 50, можно половину умножить на 100 – отсюда понятно деление пополам; умножение же на 100 достигается припиской 72 (36 × 2), отчего каждая цифра увеличивается в 100 раз (передвигается на два разряда влево).

Теперь понятно, почему «гениальный» счетчик так быстро отвечает на вопрос: «Мне столько-то лет; сколько мне недель?» Умножив число лет на 52, ему остается только прибавить еще к произведению седьмую часть числа лет, потому что в году 365 дней, т. е. 52 недели и 1 день: каждые 7 лет из этих избыточных дней накопляется лишняя неделя[31].

«Сколько мне дней?»

Если спрашивают не о числе недель, а о числе дней, то прибегают к такому приему: половину числа лет множат на 73 и приписывают нуль – результат и будет искомым числом (эта формула станет понятна, если заметить, что 730 = 365 × 2). Если мне 24 года, то число дней получим, умножив 12 × 73 = 876 и приписав нуль – 8760. Само умножение на 73 также производится сокращенным образом, о чем речь впереди (стр. 131).

Поправка в несколько дней, происходящая от високосных лет, обыкновенно в расчет не принимается, хотя ее легко ввести, прибавив к результату четверть числа лет (в нашем примере 24:4 = 6; общий результат, следовательно, 8766).

«Сколько мне секунд?»

На этот вопрос[32] также можно довольно быстро ответить, пользуясь следующим приемом: половину числа лет умножают на 63; затем ту же половину множат на 72, результат ставят рядом с первым и приписывают три нуля. Если, например, число лет 24, то для определения числа секунд поступают так:

$63 \times 12 = 756$; $72 \times 12 = 864$; результат: 756864000.

Указанными ниже приемами ускоренного умножения эти операции облегчаются до чрезвычайности, и миллионный результат получается очень быстро. Советую читателю попробовать произвести то же вычисление и обыкновенным путем, чтобы на деле убедиться, какая экономия во времени получается при пользовании указанной формулой и нижеприведенными приемами.

Как и в предыдущем примере, здесь не приняты в расчет високосные годы – ошибка, которой никто не поставит вычислителю в упрек, когда приходится иметь дело с сотнями миллионов.

Что касается правильности нашей формулы, то она выясняется очень просто. Чтобы определить число секунд, заключающихся в данном числе лет, нужно лета (в нашем примере 24) умножить на число секунд в году, т. е. на $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31536000$. Мы делаем то же самое, но только большой множитель 31536 разбиваем на два (приписка трех нулей сама собой понятна). Вместо того, чтобы умножать 24×31536, умножают 24 на 31500 и на 36, но и эти действия мы для удобства вычислений заменяем другими, как это видно из следующей схемы:

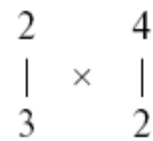
$$24 \times 31536 = \begin{cases} 24 \times 31500 = 12 \times 63000 = 756000 \\ 24 \times \quad 36 = 12 \times \quad 72 = \quad 864 \end{cases}$$
$$756864.$$

Теперь остается лишь приписать три нуля – и мы имеем искомый результат: 756864000.

Приемы ускоренного умножения

Мы упоминали раньше, что для выполнения тех отдельных действий умножения, на которые распадается каждый из указанных выше приемов, существуют также удобные способы. Некоторые из них весьма не сложны и удобоприменимы; они настолько облегчают вычисления, что мы советуем читателю вообще запомнить их, чтобы пользоваться при обычных расчетах. Таков, например, прием перекрестного умножения, весьма удобный при умножении двузначных чисел. Способ этот восходит к грекам и индусам и в старину назывался «способом молнии» или «умножением крестиком».

Пусть дано перемножить 24 × 32, мысленно располагаем числа по следующей схеме, одно под другим:



Теперь последовательно производим следующие действия:

1) 4 × 2 = 8 – это последняя цифра результата.

2) 2 × 2 = 4; 4 × 3 = 12; 4 + 12 = 16; 6 – предпоследняя цифра результата; 1 запоминаем.

3) 2 × 3 = 6, да еще оставшаяся единица, имеем 7 – это первая цифра результата.

Известны все цифры произведения: 7, 6, 8 – 768.

После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых дополнений, удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Предположим, что требуется перемножить 92 × 96. «Дополнение» для 92 до 100 будет 8, для 96 – 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96
«дополнения»: 8 и 4

Первые две цифры результата получают простым вычитанием из множителя «дополнения» множимого или наоборот; т. е. из 92 вычитают 4 или из 96 – 8. В том и другом случае имеют 88; к этому числу приписывают произведение «дополнений» 8 × 4 =

32. Получают результат 8832.

Что полученный результат верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88\,(100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ 4 \times 96 = 4\,(88 + 8) = 4 \times 8 + 88 \times 4 \end{cases}$$

$$92 \times 96 = 8832 + 0$$

Существует прием и для ускоренного умножения трехзначных чисел; он также сберегает много времени, но применение его сложнее и требует некоторого умственного напряжения, так как приходится одновременно держать в уме несколько цифр.

Какой день недели?

Умение быстро определять день недели, на какой приходится та или иная дата (например, 17 января 1893 г., 4 сентября 1943 г. и т. п.) основано на поучительном разборе особенностей нашего календаря, который мы сейчас и проделаем.

Первое января 1-го года нашей эры приходилось (как установлено расчетом) на субботу. Так как в каждом простом году 365 дней, или 52 полных недели и 1 день, то год должен кончаться тем же днем недели, каким начался; поэтому последующий год начинается одним днем недели позже, чем предыдущий. Если 1 января 1-го года была суббота, то 1 января 2-го года было днем позже, т. е. воскресенье, 3-го года – на 2 дня позже; а 1 января, например, 1923 года было бы на 1922 дня (1923 – 1) после субботы, – если бы не было ни одного високосного года. Число високосных лет мы найдем, разделив 1923 на 4 = 480; но отсюда, для нового стиля, надо исключить календарную разницу в 13 дней: 480 – 13 = 467. К полученному числу надо прибавить число дней, протекших после 1 января 1923 года до определяемой даты, – скажем для примера, до 14 декабря: это составит 347 дней. Сложив 1922, 467 и 347, мы делим сумму на 7 и по полученному остатку 6 определяем, что 14 декабря 1923 года приходится на 6 дней после субботы, т. е. в пятницу.

$$\begin{array}{r} 1922 \\ +\ 467 \\ \ 347 \\ \hline 2736 \end{array}$$

Такова общая схема вычислений недельного дня любой даты. На практике дело значительно упрощается. Прежде всего заметим, что в течение каждого 28-летнего периода бывает, вообще говоря, 7 високосных лет (неделя), – так что каждые 28 лет день недели любой даты должен повторяться. Кроме того, вспомним, что мы в предыдущем примере вычли из 1923 сначала 1, а затем календарную разницу обоих стилей, т. е. 13, всего 1 + 13 = 14 дней, или две полных недели. Но полное число недель, понятно, не влияет на результат. Поэтому для дат XX века надо принимать во внимание только: 1) число дней, протекших с 1 января данного года – в нашем примере 347; затем 2) прибавить число дней, соответствующее остатку лет от деления 1923 на 28, и наконец, 3) число високосных лет в этом остатке, т. е. 4. *Сумма этих трех чисел* (347 + 19 + 4), т. е. 370, дает при делении на 7

тот же остаток 6 (пятница), который был получен нами раньше.

$$\begin{array}{r} 347 \\ +\ 19 \\ \hline 4 \\ \hline 370 \end{array}$$

Таким же образом мы найдем, что 15 января 1923 г. приходится на понедельник (14+19 + 4 = 37;37:7 – в остатке 2). Для 9 февраля нового стиля 1917 г. мы нашли бы 39 + 13 + 3 = 55; при делении 55 на 7 получаем в остатке 6 – пятница. Для 29 февраля нового стиля 1904 г.: 59 + 0–1[33] = 58; остаток от деления на 7 здесь 2 – понедельник.

Дальнейшее упрощение состоит в том, что вместо полного числа дней месяца (при исчислении числа дней, протекших после 1 января заданного года), принимают в расчет только его остаток от деления на 7. Далее, разделив 1900 на 28, получаем в остатке 24 года, в которых содержится 5 високосных лет; прибавив их к 24 и найдя, что сумма 24 + 5, т. е. 29, дает при делении на 7 остаток 1, определяем, что 1 января 1900 года было в 1-й день недели. Отсюда для первых чисел каждого месяца получаем следующие числа, определяющие соответствующие им дни недели (мы будем их называть «остаточными числами»).

Остаточные числа для:

января . . .	. . . . .	1
февраля	1 + 31 = 32, или	4
марта	4 + 28 = 32, или	4
апреля	4 + 31 = 35, или	0
мая	0 + 30 = 30, или	2
июня	2 + 31 = 33, или	5
июля	5 + 30 = 35, или	0
августа	0 + 31 = 31, или	3
сентября	3 + 31 = 34, или	6
октября	6 + 30 = 36, или	1
ноября	1 + 31 = 32, или	4
декабря	4 + 30 = 34, или	6

Запомнить эти числа нетрудно; кроме того, их можно нанести на циферблат карманных часов, поставив возле каждой цифры

циферблата соответствующее числи точек[34].

Сделаем теперь расчет дня недели, например, для 31 марта 1923 г.

Число дней месяца 31
Остаточное число для марта 4
С начала столетия прошло лет 23
В том числе високосных 5
Сумма 63

Остаток от деления на 7. . 0 – суббота.

Найти день недели 16 апреля 1948 г.

Число дней месяца 16
Остаточное число для апреля 0
С начала столетия прошло лет 48
В том числе високосных 12
Сумма 76

Остаток от деления на 7. . 6 – пятница.

Найти день недели 29 февраля 1912

Число дней месяца 29
Остаточное число для февраля 4
С начала столетия прошло лет 12
В том числе високосных 2
Сумма 47

Остаток от деления на 7. . 5 – четверг.

Для дат предшествующих столетий (XIX, XVIII и т. д.) можно пользоваться теми же числами; но надо помнить, что в XIX веке разница между новым и старым стилем была не 13, а 12 дней; кроме того, при делении 1800: 28 получается в остатке 8, что вместе с 2 високосными годами в этом остатке составляет 10 (или 10 – 7 = 3), т. е. соответствующее характерное число для дат XIX века должно быть увеличено на 3–1 = 2. Так что, например, день недели 31 декабря 1864 г. нового стиля мы определим сначала по

предыдущему, а затем внесем соответствующую поправку – прибавим 2 дня:

Число дней месяца 31
Остаточное число для декабря 6
С начала столетия прошло лет 64
В том числе високосных 16
Поправка для XIX века 2
Сумма 119

Остаток от деления на 7. . 0 – суббота.

Найти день недели 25 апреля нового стиля 1886 г.

Число дней месяца 25
Остаточное число для апреля 0
С начала столетия прошло лет 86
В том числе високосных 21
Поправка для XIX века 2
Сумма 134

Остаток от деления на 7. . 1 – воскресенье.

После недолгого упражнения можно и еще более упростить вычисления, а именно – писать, вместо приведенных здесь чисел, прямо их остатки от деления на 7. Например, день недели 24 марта 1934 г. мы определим в результате следующих простых выкладок:

Вместо числа месяца (24) 3
Остаточное число для марта 4
Вместо числа лет, прошедших от 1900 г. . . 6
В том числе високосных 1
Сумма 0 (вместо 14).

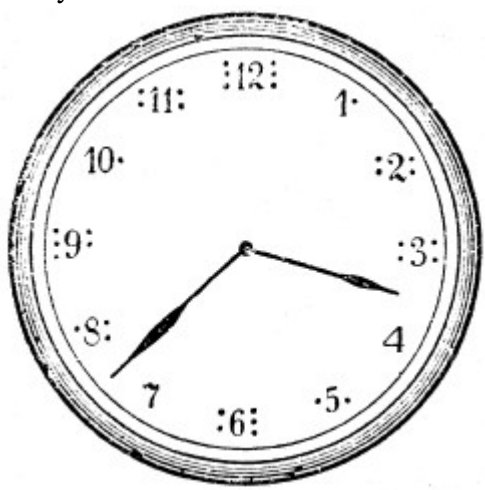
Искомый день – суббота.

Подобного рода упрощенными приемами[35] пользуются обычно те мнимые «гениальные математики», которые

показывают публике свое искусство быстрого счета. Как видите, все это очень просто и без труда может быть выполнено каждым после непродолжительного упражнения.

Календарь на часах

Знание этих маленьких секретов может не только пригодиться нам для выполнения фокусов, но и сослужить службу в повседневной жизни. Мы легко можем превратить свои карманные часы в «вечный календарь», с помощью которого сможем определить дни недели любых дат какого угодно года. Для этого понадобится только, осторожно сняв стеклышко с часов, нанести на циферблате тушью[36] точки возле цифр, в числе, соответствующем таблице, стр. 136. Как пользоваться этими точками, мы уже знаем.



Календарь на часах

Особенно просто это для дат XX столетия: к числу точек прибавляют число месяца, последние две цифры года и частное от деления их на 4, а еще лучше – остатки от деления этих чисел на 7. Остаток от деления суммы этих 4 слагаемых на 7 показывает день недели, а именно:

0 – суббота,
1 – воскресенье,
2 – понедельник,
3 – вторник и т. д.

Еще проще пользование часами-календарем для дат текущего года. Для каждого года нужно лишь держать в памяти остаток от деления на 7 суммы числа прошедших от начала века лет и четверти этого числа, этот остаток постоянно должен

прибавляться к числу месяца определяемой даты вместе с числом точек возле соответствующей цифры. В частности, для 1923 года остаток этот равен нулю, потому что $(23 + \frac{24}{3}) : 7$. Для других годов он может равняться 1, 2, 3… до 7. Остаток этот можно было бы прибавить к числу точек и ежегодно наносить на циферблат, чтобы не было надобности вводить его в вычисление особо. Это часто и рекомендуется. Но едва ли практично такое ежегодное исправление нашего «часового» календаря для надобностей текущего года, так как циферблат при таком изменении числа точек перестает быть «вечным» календарем и становится пригоден лишь для дат определенного года.

Само собою разумеется, что «вечный календарь» указанного типа возможно устроить не только на карманных часах. Вы можете просто приклеить к карандашу, линейке, к краю записной книжки, вообще к любому предмету, часто бывающему у вас под руками, узенькую полоску бумаги с соответствующей табличкой характерных для каждого месяца чисел, как указано здесь, – и маленький вездесущий вечный календарь готов.

I-1
II-4
III-4
IV-0
V– 2
VI -5
VII-0
VIII-3
IX-6
X– 1
XI-4
XII-6

Глава IX Числовые исполины

Как велик миллион?

Величественная внушительность числовых великанов – миллиона, миллиарда, даже триллиона – заметно померкла в наших глазах за последнее время, с тех пор, как числа эти вместе с потоком бумажных денег проникли в нашу повседневную жизнь. Если месячные расходы в хозяйстве небольшой семьи достигают миллиардов, а бюджет второстепенного учреждения выражается триллионами, то мы естественно начинаем думать, что эти некогда недоступные воображению числа вовсе не так уж огромны, как нам твердили до сих пор. Трудно поражаться громадности семизначного числа рублей, за которое не дадут и полной крынки молока. Не подавляет нашего ума миллиард, на который не купишь костюма.

Но было бы большим заблуждением думать, что благодаря проникновению числовых великанов из своих недоступных высот в прозу житейского обихода мы сейчас знакомы с ними лучше, чем раньше. Миллион по-прежнему остается для большинства людей тем, чем и был – знакомым незнакомцем. Скорее даже наоборот: ходячее представление о миллионе сделалось еще превратнее. Мы и раньше склонны были преуменьшать величину этого числа, превышающего силу нашего воображения; когда же миллионными числами стали выражаться весьма скромные, в сущности, ценности, миллион сжался в нашем воображении до размера самого обыкновенного, легко доступного числа. Мы впадаем при этом в курьезную психологическую ошибку: то, что миллион рублей сделался сравнительно небольшой суммой, мы относим не за счет уменьшения денежной единицы, а за счет уменьшения миллиона. Благодаря привычке и постоянству рубля и смутности нашего представления о миллионе, мы безотчетно продолжаем считать величину рубля как бы неизменной и воображаем, что нам довелось наконец постичь величину миллиона, который оказался вовсе не так огромен, как трубит его будто бы незаслуженная слава. Я слышал, как человек, узнав впервые, что от Земли до Солнца 150 миллионов километров, простодушно воскликнул:

– Только всего?

Другой, прочтя, что от Петрограда до Москвы миллион шагов, заметил:

– Только *один* миллион шагов до Москвы? А мы-то платим за билет двести миллионов!..

Вопреки общему мнению, опыт последнего времени ничем не облегчил нашему воображению работу отчетливого

представления больших чисел. Большинство людей, так свободно обращающихся с миллионами при денежных расчетах, все-таки не отдают себе ясного отчета в том, насколько эти числа огромны. Для этого следовало бы упражняться в миллионном счете не таких изменчивых единиц, как рубль, а предметов, всегда сохраняющих в нашем воображении одну и ту же постоянную величину. Если вы хотите ощутить истинные размеры миллиона – попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради миллион точек. Я не предлагаю доводить такую работу непременно до конца (на это едва ли у кого достанет терпения); уже только начало работы, его медленный ход даст вам почувствовать, что такое «настоящий» миллион.

Знаменитый английский натуралист А.Р. Уоллес придавал весьма серьезное значение развитию правильного представления о миллионе. Он предлагал[37] «в каждой большой школе отвести одну комнату или залу, на стенах которой можно было бы наглядно показать, что такое миллион. Для этой цели нужно иметь 100 больших квадратных листов бумаги, в $4У_2$ фута каждый, разграфленных квадратиками в четверть дюйма, оставив равное число белых промежутков между черными пятнами. Через каждые 10 пятен нужно оставлять двойной промежуток, чтобы отделить каждую сотню пятен (10×10). Таким образом на каждом листе будет по 10 тысяч черных пятен, хорошо различимых с середины комнаты, а все сто листов будут содержать миллион пятен. Такая зала была бы в высшей степени поучительна особенно в стране, где о миллионах говорят очень развязно и тратят их без смущения. Между тем никто не может оценить достижений современной науки, имеющей дело с невообразимо большими или невообразимо малыми величинами, если неспособен их представить наглядно и, суммируя в целое, вообразить себе, как велико число один миллион, когда современной астрономии и физике приходится иметь дело с сотнями, тысячами и даже миллионами таких миллионов[38]. Во всяком случае очень желательно, чтобы в каждом большом городе была устроена такая зала для наглядного показания на ее стенах величины одного миллиона. Это не помешало бы, если нужно, покрывать стены такой комнаты картами и другими висячими изображениями; их легко удалить, а изображение миллиона осталось бы постоянным наглядным уроком для всех посетителей».

Я предлагаю другой, более доступный для каждого способ развить в себе возможно отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно только дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете и суммировании размеров

мелких, но хорошо знакомых нам единиц – шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные, поразительные.

Приведем несколько примеров.

Миллион секунд

Как вы думаете, сколько времени отняла бы у вас работа – пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному каждую секунду? Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяц времени. Приблизительно удостовериться в этом нетрудно даже устным вычислением: в часе 3600 секунд, в 10 часах – 36000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около 100 тысяч предметов, а так как миллион в десять раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней[39]. Если бы вам платили за месяц службы всего один миллион рублей, выдавая ваше жалование единичными рублями, то все рабочее время уходило бы только на получение жалованья.

Отсюда следует, между прочим, что предложенная ранее работа – проставить в тетради миллион точек – потребовала бы много недель самого усердного и неустанного труда[40]. Да и тетрадь для этого понадобилась бы страниц в тысячу. Тем не менее такой труд был однажды выполнен. В одном распространенном английском журнале я видел недавно воспроизведение страницы из тетради, «единственное содержание которой составляет миллион аккуратно расставленных точек, по тысяче на странице». Все 500 листов этой заботливо переплетенной тетради были предварительно разграфлены карандашом и заполнены рукой одного беспримерно терпеливого школьного учителя чистописания в середине прошлого столетия. Работа, по словам дочери покойного «автора», доставившей эту тетрадь в редакцию, отняла у добровольного труженика длинный ряд лет.

В миллион раз толще волоса

Тонкость волоса вошла чуть ли не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок. Толщина его не превосходит 0,1 миллиметра. Представьте себе, однако, что волос стал в миллион раз толще – какова тогда была бы его толщина. Был ли бы он толщиной в руку? Или в бревно? Или в большую бочку? Или, может быть, ширина его достигла бы ширины комнаты средних размеров?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно почти поручиться, что, не проделав соответствующего вычисления, – выдадите грубо ошибочный ответ. Мало того: вы будете, пожалуй, даже оспаривать правильный ответ – настолько он покажется неправдоподобным. В самом деле: оказывается, что волос, увеличенный по толщине в миллион раз, имел бы сажен 50 в поперечнике! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть: 0,1 миллиметра $\times$ 1000000 = 0,1 метра $\times$ 1000 = 0,1 километра = 100 метров, или 50 сажен[41].

Иметь правильное представление о миллионе – значит уметь оценивать длину миллиона знакомых промежутков, не ошибаясь в сотни и в тысячи раз. А ведь большинство людей на вопрос нашей задачи отвечают, что волос, при увеличении по толщине в миллион раз, был бы толщиною с бочку или бревно, т. е. называют величину именно в сто или тысячу раз меньшую.

Упражнения с миллионом

Проделаем еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиною миллиона. Вы убедились уже, вероятно, на двух предыдущих примерах, насколько обычное наше представление о нем превратно и как полезно упражняться в миллионном счете, чтобы это превратное представление исправить.

Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна – около 7 миллиметров в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз – скажет не всякий. Умножим 7 мм на 1000000, получим 7 километров – примерно ширина Москвы или Петрограда. С трудом верится, что муха, увеличенная по длине в миллион раз, могла бы покрыть своим телом столичный город.

Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы – и получите снова поражающий результат, который едва ли вам удастся предугадать: они имели бы в ширину верст 50, а каждая цифра простиралась бы на целую географическую милю.

Человек в миллион раз выше обычного роста достигал бы вышины 1700 верст; он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перешагнуть из Петрограда в Москву, а если бы лег, то растянулся бы от Петрограда до Крыма.

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю:

Сделав миллион шагов по одному направлению, вы отошли бы верст на 600. От Москвы до Петрограда примерно и будет миллион шагов.

Миллион человек, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу, растянулись бы на 250 верст.

Миллионом стаканов воды можно наполнить 200 огромных восьмидесятиведерных бочек.

Миллионом точек типографского шрифта – например, этой книги, – поставленные рядом, вплотную, растянулись бы на сажен 70—100.

Зачерпывая миллион раз наперстком, вы вычерпаете около сотни ведер.

Книга в миллион страниц имела бы в толщину сажен 25.

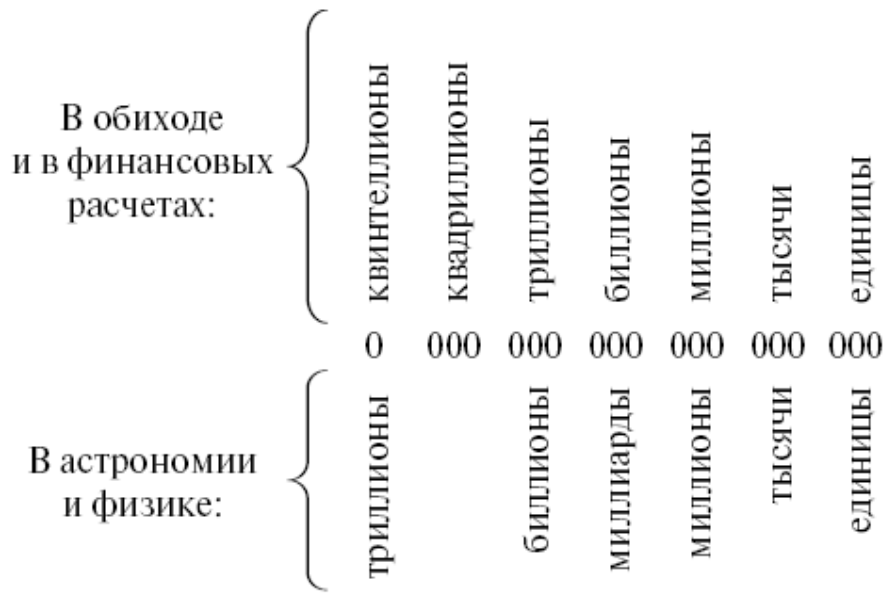
Миллион букв заключает книга убористой печати в 600–800 страниц среднего формата.

Миллион дней – более 27 столетий. От Рождества Христова не прошло еще миллиона дней.

Названия числовых великанов

Прежде чем перейти к еще большим числовым гигантам – миллиардам, биллионам, триллионам и т. д. – остановимся немного на их названиях. Слово «миллион» понимается всеми одинаково: тысяча тысяч. Но слова биллион, триллион и т. д. сравнительно недавно придуманы и еще не получили единообразного значения. При финансовых расчетах, а следовательно, и в житейском обиходе принято у нас называть «биллионом» тысячу миллионов, а «триллионом» – миллион миллионов. Но в книгах по астрономии и физике вы встречаете эти названия уже в другом значении: биллион означает здесь не тысячу, а миллион миллионов, триллион – миллион миллионов миллионов, квадраллион – миллион миллионов миллионов миллионов, и т. д. Короче говоря: в астрономических книгах каждое новое высшее наименование принято давать миллиону низших, а в финансовых расчетах и в обиходе – тысяче низших.

В приведенной здесь табличке наглядно показано это различие:



Вы видите, что физик называет биллионом то, что финансист называет триллионом и т. д., так что, во избежание недоразумений, следует наименование всегда сопровождать цифрами. Это, пожалуй, единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью скорее затемняет, чем поясняет

написанное цифрами. Вы видите также, что астрономы и физики гораздо экономнее пользуются новыми названиями, чем финансисты, которым, впрочем, нет основания особенно скупиться в этом отношении, так как им почти не приходится иметь дело более чем с 12-значными числами; в науке же 20-значные числа – нередкие гости[42].

Миллиард

Слово «миллиард» употребляется у нас в смысле тысячи миллионов как при денежных вычислениях, так и в точных науках. Но, например, в Германии и в Америке под миллиардом иногда разумеют не тысячу, а всего сто миллионов. Этим, между прочим, можно объяснить себе, что слово ««миллиардер» было в ходу за океаном еще тогда, когда ни один из тамошних богачей не имел состояния в тысячу долларов. Огромное состояние Рокфеллера незадолго до войны исчислялось «всего» 900 миллионов долларов, а остальных миллиардеров – меньшими числами. Только во время войны появились в Америке миллиардеры в нашем смысле слова (их называют на родине «биллионерами»).

Чтобы составить себе представление об огромности миллиарда, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 200000 букв. В пяти таких книжках окажется один миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 5000 экземпляров этой книжки – стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с Исаакиевский собор.

Миллиард секунд часы отобьют более чем в 30 лет. А миллиард минут составляет более

19 столетий; человечество всего двадцать лет тому назад (29 апреля 1902 года, в 10 ч 40 мин) начало считать второй миллиард минут от первого дня нашего летосчисления.

Биллион и триллион

Ощутить огромность этих числовых исполинов трудно даже человеку, опытному в обращении с миллионами. Великан миллион – такой же карлик рядом с сверхвеликаном биллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и не делаем в своем воображении большой разницы между миллионом, биллионом и триллионом. Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до 2 или до 3, а все числа свыше их одинаково обозначают словом много. «Подобно тому, как ботокудам кажется несущественной разница между двумя и тремя, – говорит известный германский математик проф. Г. Шуберт, – так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между биллионом и триллионом. По крайней мере, они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, первое относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Берлина до Сан-Франциско относится к ширине улицы».

Волос, увеличенный по толщине в биллион раз, был бы раз в 8 шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы в 70 раз толще Солнца!

Взаимоотношение между миллионом, биллионом и триллионом можно с некоторою наглядностью представить следующим образом. В Петрограде теперь (1923 г.) примерно миллион жителей. Вообразите же себе длинный прямой ряд городов таких, как Петроград, – целый миллион их: в этой цепи столиц, тянущихся на семь миллионов верст (в 20 раз дальше Луны) будет насчитываться биллион жителей… Теперь вообразите, что перед вами не один такой ряд городов, а целый миллион рядов, т. е. квадрат, каждая сторона которого состоит из миллиона Петроградов и который внутри сплошь уставлен Петроградами: в этом квадрате будет триллион жителей… Одним триллионом кирпичей можно было бы, размещая их плотным слоем по твердой поверхности земного шара, покрыть все материки равномерным сплошным пластом высотою с четырехэтажный дом (8 сажен).

Если бы все видимые в сильнейшие телескопы звезды обоих небесных полушарий, т. е. не менее 30 миллионов звезд, – были обитаемы и населены каждая в 20 раз более, нежели наша Земля, – то и тогда на всех этих звездах, вместе взятых, едва насчитывался бы один триллион людей.

Наконец, последнюю иллюстрацию мы заимствуем из мира

мельчайших частиц, составляющих все тела природы, – из мира молекул. Молекула по ширине меньше точки типографского шрифта этой книги примерно в миллион раз. После всех предшествовавших упражнений вы уже можете по этому числу до известной степени составить себе представление о малости молекулы. Теперь вообразите триллион таких молекул[43], нанизанных вплотную на одну нитку. Какой длины была бы эта нить? Ею можно было бы семь раз обмотать земной шар по экватору!

Квадриллион

В старинной (XVIII в.) «Арифметике» Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до квадриллиона, т. е. единицы с 24 нулями[44].

Вслед за этим помещены стихи:

Число есть бесконечно,
умом нам недотечно,
И никто знает конца,
кроме всех бога творца.
Несть бо нам определьно
тем же есть и бездельно

Множайших чисел искати
и больше сей писати
Превосходной таблицы,
умов наших границы
И аще кому треба
счисляти что внутрь неба

Довлеет числа сего
к вещем всем мира сего.

Наш старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может обнять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице, «умов наших границе»; заключающиеся в ней числа (от единицы до квадриллионов включительно) достаточны для исчисления всех вещей видимого мира – достаточны даже для тех, «кому треба счисляти что внутрь неба».

Любопытно отметить, что Магницкий оказался в данном случае прозорливцем. По крайней мере, современная наука в самом деле не ощущает еще нужды в числах высшего наименования, чем квадриллионы, не обращается к числам, превышающим квадриллионы. Расстояния самых отдаленных звездных скоплений, по новейшим оценкам астрономов, исчисляемые 200000 «световыхлет»[45], в переводе на километры выражаются триллионами. Это – доступные сильнейшим телескопам видимые границы вселенной. Расстояние всех других

звезд, расположенных «внутри неба», выражаются, конечно, меньшими числами. Число звезд исчисляется «всего лишь» сотнями миллионов. Древность старейших из них не превышает, по самой щедрой оценке, биллиона лет. Массы звезд исчисляются тысячами квадриллионов тонн.

Обращаясь в другую сторону, к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше квадриллионов. Число молекул в кубическом сантиметре газа – одно из самых больших множеств, реально исчисленных, – выражается десятками триллионов. Число колебаний в секунду для самых быстро колеблющихся волн лучистой энергии (лучей Рентгена) не превышает 40 триллионов. Величина самого малого предмета, какой существует в природе, – атома положительного электричества – все же не меньше триллионной части миллиметра. Если бы мы вздумали подсчитать, сколько ведер воды заключают в себе все океаны земного шара, то и тогда не дошли бы до квадриллионов, потому что при общем объеме в 1440 миллионов куб. километров океаны заключают «всего» 1440 триллионов литров или 120 триллионов ведер. Для подсчета числа капель в океане (считая даже объем капли 1 куб. миллиметр – что весьма немного), нам не понадобилось бы обратиться к наименованиям выше квадриллиона, потому что число это равно 1440 квадриллионам. Правильно, значит, сказал Магницкий о квадриллионе, что

> довлеет числа сего
> к вещем всем мира сего.

Кубическая миля и кубический километр

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода – на кубической миле; мы имеем в виду географическую милю – длиною в 7 верст или примерно столько же километров. С кубическими мерами наше воображение справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину – особенно для крупных кубических единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. Но если мы превратно представляем себе уже кубическую милю – самую большую из наших объемных мер, – то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, солнца? Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести о кубической миле более соответствующее представление.

В дальнейшем воспользуемся живописным изложением талантливого германского популяризатора А. Бернштейна, приведя, в слегка измененном виде, длинную выписку из его полузабытой книжечки – «Фантастическое путешествие через вселенную» (появившейся более полувека тому назад).

«Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую милю вперед. Сделаем мачту длиною в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковой с ней высоты человеческая статуя – статуя в семь верст высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 900 сажен; нужно было бы поставить один на другой 18 Исаакиевских соборов, чтобы добраться только до колена. Потребовалось бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть поясницы статуи.

Вообразим теперь, что мы поставили две таких мачты вышиною в милю на расстоянии мили одна от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стена в милю длины и милю вышины. Это – квадратная миля.

Если бы подобная стена действительно существовала, например, вдоль Невы в Петрограде, то – заметим мимоходом – климатические условия этого места изменились бы баснословным образом: северная сторона города могла бы иметь еще суровую зиму, когда южная уже наслаждалась бы ранним летом. В марте месяце можно было бы с одной стороны стены прогуливаться в лодке, а с другой – ездить в санях и кататься на коньках… Но мы отвлеклись в сторону.

Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим

себе еще четыре подобных стены, сколоченные вместе, как ящик. Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, т. е. что и сколько в нем может поместиться.

Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Петрограда. Они займут там очень немного места. Отправимся в Москву и по дороге захватим все губернские и уездные города. Но так как все это только покрыло дно ящика, то для заполнения его поищем материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами, колоннами, башнями и бросим туда же. Все это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, замки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало. Бросим туда все, что только сделано руками человека в Европе; но и с этим ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира; но и это мало помогает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины и фабрики мира, – все, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его людьми.

Соберем всю солому и всю хлопчатую бумагу, существующую в мире, и расстелем ее в ящике – мы получим слой, предохраняющий людей от ушибов, сопряженных с выполнением подобного опыта. Все население Германии – 50 миллионов человек – уляжется в первом слое. Покроем их мягким слоем в фут толщиною и уложим еще 50 миллионов. Покроем и этот слой и, кладя далее слой на слой, поместим в ящике все население Европы, Азии, Африки, Америки, Австралии… Все это заняло не более 35 слоев, т. е., считая слой толщиной в метр, – всего 35 метров. Понадобилось бы в 50 раз больше людей, чем их существует на свете, чтобы наполнить вторую половину ящика.

Что же нам делать? Если бы мы пожелали поместить в ящике весь животный мир – всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них наложить всех птиц, рыб, змей, все, что летает и ползет, – то и тогда мы не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и камней.

Ящик же наш занимает объем всего лишь в одну кубическую милю. Право, можно питать к ней некоторое почтение!

Возможно ли, чтобы кубическая миля была так велика? Неужели ящик в милю длины, ширины и высоты нечем наполнить? Неужели нельзя придумать машины, которая наготовила бы достаточно материала для его заполнения?

Сделаем пробу. Соорудим кирпичный завод и устроим такую машину, которая каждую секунду приготовляет один готовый кирпич в форме куба с ребром в 1 фут. Устроим ее так, чтобы работа шла днем и ночью без перерыва и каждый сделанный кирпич сам укладывался бы в ящик.

Итак, машина пущена. Глаз едва в состоянии следить за работой. Подождем: вероятно, машина скоро окончит свое дело.

Действительно, скоро… Мы можем в точности вычислить это. Ежесекундно машина укладывает один кирпич, в минуту – 60, в час – 3600, в сутки – 86400, в год – около 31 миллиона.

Но сколько подобных кирпичей нужно для заполнения ящика? Квадрат со стороною в 7 верст, или 24500 футов, заключает круглым счетом 600 миллионов квадратных футов. Нужно 600 миллионов кирпичей, чтобы выложить первый слой. А так как фабрика изготовляет ежегодно всего 31 миллион кирпичей, то ясно, что для покрытия только дна ящика нужно около 20 лет.

Ящик же имеет в вышину милю; это значит, что для заполнения его нужно 24500 таких слоев, какие заполняют дно. Сделав умножение, убедимся, что машина наша вовсе не так скоро окончит свою работу, как нам казалось. Она должна день и ночь работать без малого полмиллиона лет, чтобы исполнить свою задачу…

Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков! При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение».

Теперь, когда неимоверная огромность кубической мили (около 350 куб. километров) стала до некоторой степени ощущаться читателем, мы прибавим, что целая кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их «всего» несколько триллионов.

Весьма внушительную вместимость имеет и кубический километр. Нетрудно подсчитать, например, что ящик таких размеров мог бы вместить 5000 биллионов спичек, вплотную уложенных; для изготовления такого количества спичек фабрика, выпускающая миллион спичек в сутки, должна была бы работать 14 миллионов лет; а чтобы такое число спичек доставить, потребовалось бы 10 миллионов вагонов – поезд длиною в 100000 километров, т. е. в $2^1/_2$ раза длиннее земного экватора. И все-таки в целом кубическом километре воды содержится не более одного триллиона мельчайших капель (считая объем капли 1 куб. миллиметр), – в миллион раз меньше квадриллиона.

Исполинские размеры триллиона и квадриллиона, после сказанного о кубических миле и километре, еще более вырастают в нашем сознании.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ
(см. стр. 128)

$$91 + \frac{5823}{647} = 100$$

$$94 + \frac{1578}{263} = 100$$

$$96 + \frac{1428}{357} = 100$$

Глава X Числовые лилипуты

Гулливер в своих странствованиях, покинув карликов-лилипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лилипутов – к числам, которые во столько же раз меньше единицы, во сколько единица меньше числового исполина.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда: для этого достаточно написать ряд чисел, обратных миллиону, миллиарду, биллиону и т. д., т. е. делить единицу на эти числа. Получающиеся дроби

$$\frac{1}{1\,000\,000},\ \frac{1}{1\,000\,000\,000},\ \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}\ \text{и т.д.}$$

есть типичные числовые лилипуты, во столько же раз меньшие единицы, во сколько раз единица меньше миллиона, миллиарда, биллиона и прочих числовых исполинов.

Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число-лилипут, и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них также придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали, что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

1 000 000……10^6
10 000 000……10^7
400 000 000……$4 \cdot 10^8$ и т. д.

Соответственно этому числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$$\frac{1}{1\,000\,000} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10^{-6}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000\,000} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10^{-8}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000} \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \cdot 10^{-9} \text{ и т.д.}$$

Есть ли, однако, реальная надобность в подобных дробях? Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело с столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее.

Лилипуты времени

Секунда, по обычному представлению, есть настолько малый промежуток времени, что с мелкими частями секунды не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах. Что может случиться, например, в одну тысячную долю секунды? Легко написать: $^1/_{1000}$ секунды, – но это чисто бумажная величина, потому что ничего не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, – но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма различные явления. Поезд, проходящий 36 километров в час, делает в секунду 10 метров, и следовательно, в течение 1000-й доли секунды успевает продвинутся на один сантиметр. Звук в воздухе переносится в течение 1000-й доли секунды на 33 сантиметра (около полуаршина), а пуля, покидающая ружейный ствол со скоростью 700–800 метров в секунду, переносится за тот же промежуток времени на целый аршин. Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды, в своем обращении вокруг Солнца, на 30 метров. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды 2–4 и более полных колебаний; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше, чем 1000-я доля секунды, т. е. в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться крупное явление природы (молния простирается в длину на целые версты).

Но – возразите вы – 1000-я доля секунды еще не подлинный лилипут, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Если взять миллионную долю секунды, то уж наверное можно утверждать, что это – величина не реальная, промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может. Ошибаетесь: даже и одна миллионная доля секунды – для современного физика, например, – вовсе не чрезмерно маленький промежуток. В области явлений световых (и электрических) физику сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает ежесекундно (в пустоте) 300000 километров; следовательно, в 1000000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 метров – примерно на столько же, на сколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее: свет есть явление волнообразное, и число световых волн, проносящихся ежесекундно через точку пространства, исчисляется сотнями биллионов. Те световые волны, которые,

действуя на наш глаз, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 биллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1000000-й доли секунды в наш глаз вступает 400 000 000 волн, а одна волна вступает в глаз в течение 400 000 000 000 000-й доли секунды. Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении рентгеновских лучей. Эти замечательные лучи, обладающие удивительным свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собою, как и видимые лучи, также волнообразное явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у видимых: она достигает 25000 биллионов в секунду. Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого в пять дюжин раз и, следовательно, имеет все права именоваться по отношению к нему исполином.

Лилипуты пространства

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие расстояния приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.

В метрической системе мер наименьшая единица длина для обиходного употребления – миллиметр; она примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерять предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения инфузорий, бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр слишком крупен. Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице – микрону, который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капельке нашей крови, имеют в длину 7 микронов и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же оказывается чрезмерно крупным для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, недоступные даже микроскопу частицы, молекулы, из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие атомы имеют размеры от одной 10000-й до одной 1000-й доли микрона. Если остановиться на последней, наибольшей величине, то и тогда окажется, что миллион таких крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион!), будучи расположены на одной прямой, вплотную друг к другу, заняли бы всего лишь один миллиметр.

Чтобы представить себе наглядно чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева башня (300 метров высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300000 километров в мировое пространство и находилась бы в недалеком соседстве от орбиты Луны. Люди были бы высотой с большую гору версты в $1У_2$; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600–700 верст. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждый более 3 сажен (7 метров) и поперечнике. Волос имел бы сажен 50 в толщину. Мышь достигала бы 100 верст в длину, муха – 8 верст. Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества?

Положительно не верится: его размеры предстанут перед вами в виде… типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной

малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изощренными приемами измерений? Еще не особенно давно думали так; но теперь известно, что атом – целый мир, состоящий из гораздо более мелких частей и являющийся ареною действия могущественных сил. Атом, например, водорода состоит из центрального ядра и быстро обращающегося вокруг него электрона. Не входя в другие подробности, расскажем только о размерах этих составных частей атома. Поперечник электрона измеряется биллионными долями миллиметра, а ядро – тысяче-биллионными долями. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз, а ядро – в миллиард раз меньше поперечника атома. Если вы пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки примерно во столько же раз, во сколько раз пылинка меньше – чего бы вы думали? Земного шара!

Вы видите, что атом, лилипут из лилипутов, является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим в его состав, – таким же, каким вся солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующий поучительный ряд, в котором каждый член является исполином по отношению к предыдущему члену и лилипутом по отношению к последующему:

электрон,
атом,
пылинка,
дом,
земной шар,
солнечная система,
расстояние до Полярной звезды.

Каждый член этого ряда примерно в четверть миллиона раз[46] больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего. Ничто не доказывает так красноречиво всю относительность понятий «большой» и «малый», как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще огромной и исчезающе малой, в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить. «Время и пространство – закончим мы словами одного английского физика[47] – понятия чисто относительные. Если бы сегодня в полночь все предметы – в том числе и мы сами и наши измерительные приборы – уменьшились в 1000 раз, мы совершенно не заметили бы этого изменения. Не было бы никакого указания на то, что произошло такое

уменьшение. Точно так же, если бы все события и все часы получили ускорение хода в одинаковом отношении, то мы, равным образом, ничего не подозревали бы об этой перемене».

Сверхисполин и сверхлилипут

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы не полны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода, – диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем с следующей, на вид весьма простенькой задачи:

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами?

Хочется ответить: 999, – но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ другой, иначе задача была бы чересчур проста. И действительно, правильный ответ пишется так:

$$9^{9^9}$$

Выражение это означает: «девять в степени девять в девятой степени». Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения:

$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$.

Достаточно только начать вычисление, чтобы ощутить огромность предстоящего результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число:

387420489.

Главная работа только начинается: теперь нужно найти $9^{387420489}$, т. е. произведение 387420489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений… У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат – по трем причинам, которые нельзя не признать весьма уважительными. Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых, если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг, как эта, потому что число наше состоит из 369 693 100 цифр; набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 верст… Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги, я и тогда не мог бы удовлетворить вашего любопытства; вы легко можете сообразить почему. В самом деле, если я способен писать без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь, – не более 172800 цифр. Отсюда следует, что, не отрываясь

ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без праздников, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число…

Вы видите, что уже число цифр нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим тысячеверстным рядом цифр? Трудно дать хотя бы приблизительное представление о его громадности, потому что такого множества отдельных вещей – считая даже каждый электрон за отдельную вещь – нет в целой вселенной!

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он, до неподвижных звезд, был наполнен тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий единицы с 63 нулями. Наше число состоит не из 64, а из 370 миллионов цифр – следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

Поступим же по примеру Архимеда, но вместо «исчисления песчинок» произведем «исчисление электронов». Вы уже знаете, что электрон меньше песчинки примерно во столько же раз, во сколько раз песчинка меньше земного шара. Для размеров вселенной возьмем наибольшую предельную величину, допускаемую для нее современной наукой. Именно, есть основание думать, что поперечник вселенной не может превышать расстояния, пробегаемого световым лучом в миллиард лет (в секунду свет проходит 300000 километров). Представим себе теперь, что вся таких размеров вселенная сплошь заполнена плотнейшим металлом – платиной, каждый атом которой заключает 78 электронов. Сколько электронов помещалось бы тогда во вселенной? Расчет дает результат, состоящий «всего только» из 100 цифр. Сколько же понадобилось бы «платиновых вселенных», чтобы вместить 9^{9^9} электронов? Столько, сколько единиц в числе, состоящем примерно из 369693 цифр… Вы видите, что, наполняя весь мир – величайшее, что мы знаем – электронами, т. е. мельчайшим из того, что нам известно, – мы не исчерпали бы и небольшой доли того исполинского числа, которое скромно скрывается под изображением:

$$9^{9^9}$$

Познакомившись с этим замаскированным гигантом, обратимся к его противоположности. Если бы вас спросили, какое самое маленькое число можно написать тремя цифрами, вы теперь не удовлетворились бы ответом вроде

$$100;\quad \frac{1}{99};\quad 0{,}01,$$

а написали бы, вероятно, что-нибудь вроде

$$\frac{1}{9^9}.$$

Это, действительно, весьма малое число, потому что оно равно

$$\frac{1}{387420489}.$$

Однако скромное вторжение в область алгебры даст вам средство написать гораздо меньшее число, именно

$$9^{-9^9}.$$

Это означает:

$$9^{-387420489},\ \text{т.е.}\ \frac{1}{9^{38720489}}\quad .$$

Другими словами, мы имеем здесь уже знакомое нам огромное число, но только в знаменателе. Сверхвеликан превратился в сверхлилипута…

Глава XI Арифметические путешествия

Ваше кругосветное путешествие

Лет пятнадцать назад я занимался в редакции одного распространенного петроградского журнала, где состоял секретарем, когда мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомое мне имя и совершенно необычайное обозначение профессии или звания: *«Первый русский кругосветный путешественник пешком»*. По обязанностям службы мне не раз доводилось видеть русских путешественников по всем частям света и даже кругосветных, – но о «кругосветном путешественнике пешком» я никогда еще не слыхал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим предприимчивым и неутомимым человеком.

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, «первый русский кругосветный и т. д.» объяснил мне, что оно теперь именно и совершается. Маршрут? Шувалово[48] – Петроград; о дальнейшем он желал посоветоваться со мною… Из разговора выяснилось, что планы «первого русского и т. д.» довольно смутны, но во всяком случае не предусматривают оставления пределов России.

– Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие? – с изумлением спросил я.

– Главное дело пройти длину земного обхвата, а это ведь можно сделать и в России, – разрешил он мое недоумение. – Десять верст уже пройдено, и остается…

– Всего 37490. Счастливого пути!

Не знаю, как странствовал «первый и т. д.» на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше совсем не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыходно проживал там, – он и в таком случае прошел не менее 40 тысяч верст. Боюсь только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И я, и вы, и большинство других граждан России имеют столько же прав на звание «русского кругосветного путешественника пешком», в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь, даже менее длинный, чем окружность земного шара. Маленький арифметический подсчет сейчас убедит вас в этом.

В самом деле. В течение каждого дня вы, конечно, не менее 5 часов проводите на ногах: ходите по комнатам, по двору, по

улице, словом, так или иначе шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30000 шагов. Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами в день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек делает в час 4–5 километров. Это составляет в день, т. е. за 5 часов, 20–25 километров. Теперь остается умножить этот дневной наш переход на 360 – и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

$20 \times 360 = 7200$, или же $25 \times 360 = 9000$.

Итак, самый малоподвижный человек, быть может, никогда даже и не покидавший родного города, проходит ежегодно пешком около 8000 километров. А так как окружность земного шара имеет 40000 километров, то нетрудно вычислить, во сколько лет мы совершаем пешеходное путешествие, равное кругосветному:

$40000 : 8000 = 5$.

Значит, в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста – уже дважды совершил «кругосветное» путешествие. Каждый 25-летний человек выполнил не менее 4 таких путешествий. А дожив до 60 лет, мы десять раз обойдем вокруг земного шара, т. е. пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380000 километров).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

Ваше восхождение на Монблан

Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресатам, или врача, целый день занятого посещением своих пациентов, совершали ли они восхождение на Монблан, – они, конечно, удивятся такому странному вопросу. Между тем вы легко можете доказать каждому из них, что, не будучи альпинистами, они наверное совершили за время своей деятельности восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп. Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон или врач ежедневно, восходя по лестницам при разноске писем или посещении больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений.

Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры; допустим, что ежедневно посещается только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто на третьем, четвертом, пятом – в среднем возьмем на третьем. Высоту третьего этажа примем для круглого числа в 5 сажен, т. е. 10 метров: следовательно, наш почтальон или врач ежедневно совершают по ступеням лестниц путешествие на высоту $10 \times 10 = 100$ метров. Высота Монблана 4800 метров. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней…

Каждые 48 дней или примерно 8 раз в год почтальон или врач поднимаются по лестницам на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан?

Не надо непременно быть почтальоном, чтобы выполнять подобные подвиги, самому того не ведая. Я живу во 2-м этаже, в квартире, куда ведет лестница с

20 ступеньками – число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице раз 5, да еще посещать двоих знакомых, живущих, скажем, на такой же высоте. В среднем можно принять, что я поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступенями, то есть взбегаю вверх каждый день по 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?

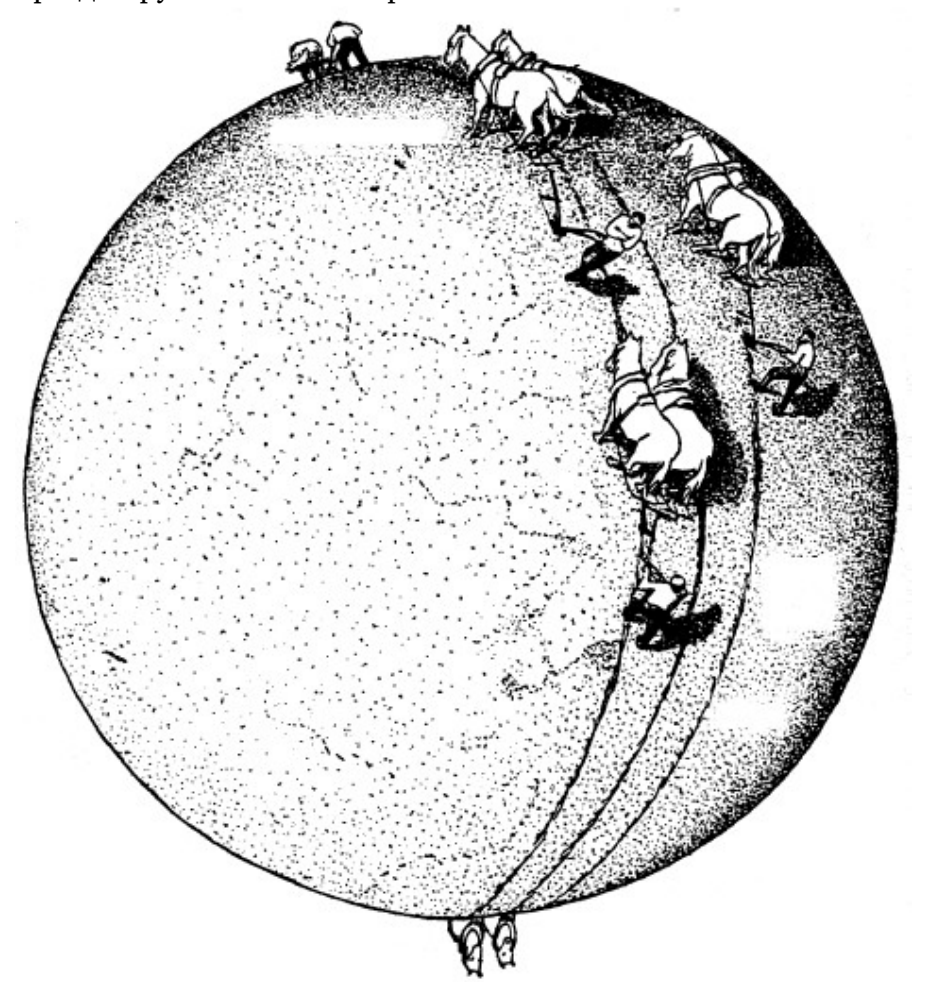
$140 \times 360 = 50400.$

Итак, ежегодно я поднимаюсь более чем на 50000 ступеней. Если мне суждено дожить до 60-летнего возраста, я успею

подняться на вершину сказочно высокой лестницы в три миллиона ступеней. Как изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой уходящей в бесконечную даль лестницы и сказали, что некогда я, быть может, достигну ее вершины… На какие же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только и делают, что поднимаются на высоту, например, служители при лифтах? Кто-то подсчитал, что например, служитель при лифте одного из нью-йоркских небоскребов совершает за 15 лет службы подъем до высоты… Луны!

Пахари-путешественники

Взгляните на странный рисунок, приведенный на следующей странице. Кто те сказочные пахари-богатыри, что проводят борозды кругом земного шара?



«Кто те сказочные пахари-богатыри, что проводят борозды кругом земного шара?»

Вы полагаете, рисунок – создание чересчур разыгравшейся фантазии художника? Нисколько: художник лишь изобразил наглядно то, о чем скажут вам достоверные арифметические подсчеты, если вы дадите себе труд их произвести. Каждый пахарь проходит со своим плугом в течение нескольких лет (4–6) такое расстояние, которое равно окружности земного шара.

Выполнение этого неожиданного по своим результатам арифметического подсчета предоставляю читателю произвести самостоятельно.

Незаметное путешествие на дно океана

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служители таких же складов и т. п. Много раз в день сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в погреб, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени мальчик – служитель подвального склада проходит, таким образом, вниз расстояние, равное глубине океана. Если лестница углубляется, скажем, всего на 1 сажень, т. е. 2 метра, и мальчик сбегает по ней ежедневно всего 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в $30 \times 20 = 600$ метров, а в год $600 \times 12 = 7200$ метров – более 7 километров. Вспомним, что глубочайшая шахта простирается в недра Земли всего на 2 километра!

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой служитель подвального торгового помещения достиг бы дна океана в течение одного года (наибольшая глубина Тихого океана – около 9 верст). Сам того не подозревая, такой приказчик проходит ежегодно вниз расстояние, которое в океане перенесло бы его в таинственную область причудливых глубоководных созданий, куда достигал до сих пор только лот исследователя морских пучин.

Путешествующие сидя на месте

Не думайте, что арифметические путешествия совершает лишь тот, кто перемещается, хотя бы и пешком. Есть люди, которые, сидя неподвижно за своей работой, тем не менее совершают длиннейшие странствования. Далеко ли, казалось бы, может путешествовать портной, прилежно работающий иглой, сидя неподвижно на столе? Однако и он не ускользает от общей участи быть кругосветным путешественником. Его проворная игла успевает ежесекундно пробежать вперед и назад полсотни сантиметров. Сколько это составит в час?

$50 \times 60 \times 60 = 180000$ см $= 1800$ метров.

Итак, игла портного пробегает ежечасно почти два километра. За 8 часов рабочего дня она проходит более 14 километров.

Теперь нетрудно вычислить, в течение какого времени игла портного, – если только он обеспечен работой, – проходит путь, равный окружности земного шара. Разделив длину этой окружности, 40000 километров, на 14, получим более 2800 дней. Это значит, что примерно в 8 лет усердно работающий портной совершает концами своих пальцев кругосветное путешествие. «Неподвижный кругосветный путешественник»…

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является не тот, кто проделал кругосветное путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что не совершил подобного подвига, вы, надеюсь, сможете теперь «математически» доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.

notes

Примечания

1

Среди них известный сборник Е.И. Игнатьева «В царстве смекалки» (из трех книг; книги 2-я и 3-я составлены при моем участии) почти исчерпывает весь «классический» материал арифметических развлечений.

2

Вечерний выпуск газеты «Биржевые Ведомости» от 16 марта 1917 г.

3

Их было много тогда в Петрограде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста. Китайцы вообще не употребляют наших «арабских» цифр.

Подтверждение того, что знаки эти были в широком употреблении среди населения.

5

Расположение чисел здесь такое, какое принято в Англии и Америке: частное и делитель пишутся по обе стороны делимого.

6

Английское название игры «div-a-let» – сокращение от «division by letter» – деление буквами.

7

«Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от рождества Бога слова 1703».

Максом Дюрингом («Zeitschr. f. päd. Psychol.», 1912).

Это была доска (стол), разграфленная на полосы, по которым передвигали особые шашки, игравшие роль косточек наших счетов. Такой вид имел греческий абак. Абак римский имел форму медной доски с желобами (прорезами), в которых передвигались кнопки. Родственен абаку перуанский «квипос» – ряд ремней или бечевок с завязанными на них узлами; этот счетный прибор получил особенное распространение среди первоначальных обитателей Ю. Америки, но, без сомнения, был в употреблении также и в Европе (см. далее, стр. 43).

Этот прием полезен и для устного деления на 9.

11

Один считает на камешках, другой – на бобах, читаем у Кампанеллы в «Государстве Солнца» (1602).

12

Перечисленные приемы умножения описаны в старинной «Арифметике» Тарталья. Наш современный способ умножения имеется там под названием «шахматного».

13

Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV–XVI столетиях вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были, ради коммерческих надобностей, разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины коммерческой арифметики сохранились еще в настоящее время.

14

Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления.

Это выясняется попутно при выводе признака делимости на 9 (читатель найдет вывод в каждом подробном учебнике арифметики).

15

Папирус был разыскан английским египтологом Генри Риндом; он оказался заключенным в жестяном футляре. В развернутом виде имеет 10 сажен длины, при 6 вершках ширины. Хранится в Британском музее, в Лондоне.

16

Звание «писец» принадлежало третьему классу египетских жрецов; в заведывании их находилось «все относившееся к строительной части храма и к его земельной собственности». Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальность (В. Бобынин).

«Природа и Люди» (потом была перепечатана в сборнике Е.И. Игнатьева «В царстве смекалки»).

Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблица сложения и таблица умножения.

19

Нечетное число, умноженное на себя (т. е. на нечетное), всегда дает нечетное число (напр., $7 \times 7 = 49$, $11 \times 11 = 121$ и т. п.).

20

Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, так как все числа, кратные 9, сохраняют одну и ту же сумму цифр – 9.

Было бы, однако, большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых кучек, то это свойство их, конечно, не изменится от того, будет ли число орехов в мешке выражено числом в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким-либо иным способом. Если число, написанное в 12-ричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например, в десятичной, оно должно иметь тех же делителей. Разница лишь в том, что в 12-ричной системе делимость на 6 или на 72 легче обнаружить (число оканчивается одним или двумя нулями). Когда говорят о преимуществах 12-ричной системы в смысле делимости на большее число делителей, то имеют в виду, что благодаря склонности нашей «к круглым» числам на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся, в 12-ричной системе, нулями.

Почему $12345 \times 9 + 6$ дает именно 111111 – было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

21

Было бы, однако, большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых кучек, то это свойство их, конечно, не изменится от того, будет ли число орехов в мешке выражено числом в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким-либо иным способом. Если число, написанное в 12-ричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например, в десятичной, оно должно иметь тех же делителей. Разница лишь в том, что в 12-ричной системе делимость на 6 или на 72 легче обнаружить (число оканчивается одним или двумя нулями). Когда говорят о преимуществах 12-ричной системы в смысле делимости на большее число делителей, то имеют в виду, что благодаря склонности нашей «к круглым» числам на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся, в 12-ричной системе, нулями.

22

Почему $12345 \times 9 + 6$ дает именно 111111 – было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

23

В двоичной системе счисления, как мы уже объясняли ранее (см. главу V), все умножения именно такого рода. На этом примере мы наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

24

Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999999, умноженному на число семерок в множителе; такое умножение легко выполнить в уме. Например, $42857 \times 28 = 999999 \times 4 = 4000000 - 4 = 3999996$.

25

Русский перевод (вольный) Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

26

Проходившие алгебру знают, что и число 1 можно рассматривать, как степень 2, именно нулевую.

27

Единицу можно рассматривать как нулевую степень 3 (вообще как нулевую степень каждого числа).

28

Русский разновес: 2 п., 1 п., 20 ф., 10 ф., 5 ф., 3 ф., 2 ф., 1 ф.

Например, изящный фокус с «волшебным веером» – отгадывание задуманного числа, если известно, в каких табличках чисел оно находится.

Это свойство разности вытекает из «закона остатков», о котором мы упоминали раньше.

31

Нетрудно ввести и поправку на високосные годы.

32

Прием для вычисления числа минут читатель, после сказанного в следующей статье, не затруднится найти самостоятельно.

33

Деля 1904 на 28, мы уже учли, что 1904-й год – високосный; беря же в феврале 29 дней, мы учитываем это обстоятельство второй раз. Поэтому надо лишний день откинуть.

34

Для наглядности на стр. 140 приложен чертеж такого циферблата.

35

Способов сокращенного вычисления календарных дат существует множество. Я изложил здесь самый простой из известных мне приемов, употребляемый упомянутым выше германским математиком, Ф. Ферролем, прославившимся в последнее время своими поразительно быстрыми устными вычислениями.

Тушью, а не чернилами, чтобы возможно было, по миновании надобности, легко смыть точки с циферблата.

37

В книге «Положение человека во вселенной».

Например, взаимные расстояния планет измеряются десятками и сотнями миллионов верст; расстояния звезд – миллионами миллионов верст, а число молекул в кубическом сантиметре воздуха – миллионами миллионов миллионов. – *Я.П.*

39

Отметим для сведения, что в году (астрономическом) 31556926 секунд.

40

До какой степени люди склонны недооценивать величину миллионов, показывает следующий поучительный пример. Тот самый Уоллес, который так предостерегает других от преуменьшения миллиона, заканчивает приведенный выше (стр. 144–145) отрывок таким советом:

«В маленьких размерах каждый может устроить это сам для себя: стоит только достать сотню листов толстой бумаги, разлиновать их на квадратики и поставить крупные черные точки. Подобное изображение было бы очень поучительно, хотя не в такой, конечно, степени, как осуществленное в большом масштабе». Почтенный автор, по-видимому, полагал, что подобная работа под силу одному человеку. Между тем мы уже знаем, что для этого потребовался бы настоящий подвиг труда – несколько месяцев непрерывной работы, всецело посвященной кропотливой расстановке в квадратиках крупных черных точек (конечно, не по одной в секунду). Ошибка Уоллеса произошла, разумеется, вследствие недооценки истинной величины миллиона.

Мы проделали здесь умножение несколько необычным путем – вместо умножения числа мы только заменили самую единицу меры другою, в миллион раз большею. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться при выкладках с метрическими мерами.

Надо заметить, впрочем, что обычные цифровые обозначения весьма больших чисел и их названия употребляются лишь в популярно-научных книгах; в книгах же строго научных по физике и астрономии пользуются обыкновенно иным способом обозначения: биллион обозначается 10^{12}, триллион – 10^{18}, двадцать семь тысяч биллионов – $27–10^{15}$ и т. д. При таком способе обозначения сберегается место и, кроме того, гораздо легче производить над числами различные действия (по правилам, изучаемым в алгебре).

43

В каждом кубическом сантиметре воздуха (т. е. примерно в наперстке) насчитывается – отметим кстати – от 20 до 30 триллионов молекул. Не знаешь, чему изумляться больше: огромной численности молекул или их невообразимой малости…

Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает каждое новое наименование миллиону низших единиц (биллион – миллион миллионов, и т. д.)

45

Световой год – путь, проходимый лучом света в 1 год (свет пробегает в секунду 300000 километров).

Имеются в виду линейные размеры, т. е. поперечник атома, диаметр солнечной системы, высота или длина дома, и т. п.

Фурнье Дальб. «Два новые мира» (есть русский перевод).

48

Шувалово – небольшая станция в 10 верстах от Петрограда.